Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 519.35 *МАТЕМАТИКА*

Е. С. ЛЕВИТИН, А. А. МИЛЮТИН, Н. П. ОСМОЛОВСКИЙ

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА В ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 15 IX 1972)

1. Пусть в банаховом пространстве X заданы вещественные функционалы $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)$ и оператор $g(x)$, действующий в другое банахово пространство Y. Требуется минимизировать $f_0(x)$ при ограничениях $f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, $g(x) = 0$.

Все известные как первого, так и высших порядков необходимые условия локального минимума в точке x_0 (например, в задачах вариационного исчисления, оптимального управления, нелинейного программирования) есть необходимые условия выполнения следующего требования: не существует последовательности $\delta x_n \to 0$ такой, что

$$f_0(x_0 + \delta x_n) < f_0(x_0), \quad f_i(x_0 + \delta x_n) < 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$g(x_0 + \delta x_n) = 0.$$

Последнее, очевидно, само является необходимым условием локального минимума в точке x_0. В силу сказанного выше, естественно назвать его сильнейшим необходимым условием локального минимума, или, коротко, s-необходимостью (мы будем также говорить, что в точке x_0 выполнена s-необходимость).

Известные второго и высших порядков достаточные условия локального минимума являются на самом деле достаточными условиями строгого локального минимума, который означает следующее: не существует последовательности $\delta x_n \to 0$, $\delta x_n \neq 0$, такой, что

$$f_0(x_0 + \delta x_n) \leqslant f_0(x_0), \quad f_i(x_0 + \delta x_n) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$g(x_0 + \delta x_n) = 0.$$

Это условие мы будем называть слабейшим достаточным условием локального минимума или, коротко, s-достаточностью (мы будем также говорить, что в точке x_0 выполнена s-достаточность).

2. Прежде чем сформулировать результат в общем случае, сформулируем его в простейшем случае.

Пусть X — конечномерное пространство, $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Требуется минимизировать $f(x)$ при ограничении $g(x) = 0$. Пусть в точке x_0 градиент $g'(x_0) \neq 0$ и существуют нетривиальные множители Лагранжа. Результат, который мы затем обобщаем в настоящей работе, состоит в следующем: (I) s-Необходимость в точке x_0 эквивалентна наличию в точке x_0 локального минимума у функции $\Phi_\eta = L + \eta|g|$ при каждом $\eta > 0$, где L — функция Лагранжа; (II) s-Достаточность эквивалентна наличию строгого локального минимума у функции Φ_η при каждом $\eta > 0$.

3. Общий случай. Пусть $f_i(x) = \varphi_i[P_i(x)], i = 0, 1, \ldots, k$, где $P_i(x)$ — оператор, действующий из X в банахово пространство Y_i, а $\varphi_i(y_i)$ — непрерывный сублинейный функционал в пространстве Y_i. Предположим

также, что в некоторой окрестности точки x_0, исследуемой на минимум, операторы $P_0(x), \ldots, P_k(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы по Фреше, причем градиент $g'(x_0)$ есть линейный оператор, отображающий X на Y.

Известно [1], что при сделанных предположениях необходимым условием существования в точке x_0 локального минимума является существование нетривиального решения уравнения Эйлера: существуют числа α_i, линейные функционалы $y_i^* \in Y_i^*$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $y^* \in Y^*$ такие, что

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \langle y_i^*, y_i \rangle \leqslant \varphi_i(y_i) \quad \forall y_i \in Y_i,$$

$$\langle y_i^*, P_i(x_0) \rangle = \varphi_i[P_i(x_0)], \; i = 0, 1, \ldots, k, \quad \alpha_i f_i(x_0) = 0, \; i = 1, \ldots, k; \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i [P_i'(x_0)]^* y_i^* + [g'(x_0)]^* y^* = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \tag{3}$$

(последнее условие есть условие нормировки и может быть заменено любым эквивалентным).

Совокупность наборов $\lambda = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k, y_0^*, \ldots, y_k^*, y^*)$, удовлетворяющих условиям (1) — (3), обозначим через Λ_0.

Для каждого $\eta \geqslant 0$ обозначим через Λ_η множество наборов λ, удовлетворяющих условиям:

a) $\alpha_i \geqslant 0$, $\langle y_i^*, y_i \rangle \leqslant \varphi_i(y_i) \quad \forall y_i \in Y_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\alpha_i f_i(x_0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$;

b) $\langle y_0^*, P_0(x_0) \rangle - f_0(x_0) \geqslant -\eta$, $\quad i = 1, \ldots, k$;

c) $\left\| \sum_{i=0}^{k} \alpha_i [P_i'(x_0)]^* y_i^* + [g'(x_0)]^* y^* \right\| \leqslant \eta$;

d) $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$.

Система $\{\Lambda_\eta\}_{\eta>0}$ есть монотонно убывающая по η система выпуклых слабо* компактных множеств, поэтому она не содержит пустого множества тогда и только тогда, когда $\bigcap_{\eta>0} \Lambda_\eta = \Lambda_0$ не пусто.

Положим

$$\Phi_\eta(\delta x) = \max_{\Lambda_\eta} \Big\{ \alpha_0 [\langle y_0^*, P_0(x_0 + \delta x) \rangle - f_0(x_0)] + \\ + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle y_i^*, P_i(x_0 + \delta x) \rangle + \langle y^*, g(x_0 + \delta x) \rangle \Big\}, \quad \eta \geqslant 0.$$

Заметим, что $\Phi_\eta(0) = 0$. Функционал Φ_η зависит от нормировки, но при переходе к эквивалентной нормировке приводимая ниже теорема 1 остается в силе: это же будет относиться и к теоремам 2 и 3.

Теорема 1. *В точке x_0*: I. *s-Необходимость выполнена тогда и только тогда, когда $\Lambda_0 \neq \phi$ и $\Phi_\eta(\delta x)$ имеет локальный минимум в нуле при каждом $\eta > 0$;*

II. *s-Достаточность выполнена тогда и только тогда, когда $\Lambda_0 \neq \phi$ и $\Phi_\eta(\delta x)$ имеет строгий локальный минимум в нуле при каждом $\eta > 0$.*

4. Обозначим ω набор $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k, y^*)$, $\Omega_\eta = \operatorname{пр}_\omega \Lambda_\eta$, $\eta \geqslant 0$. Положим

$$\Psi_0(\delta x) = \max_{\Omega_0} \Big\{ \alpha_0 \delta f_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x_0 + \delta x) + \langle y^*, g(x_0 + \delta x) \rangle \Big\},$$

где $\delta f_0 = f_0(x_0 + \delta x) - f_0(x_0)$. Положим

$$\sigma(\delta x) = (\delta f_0)^+ + \sum_{i=1}^{k} f_i(x_0 + \delta x) + \|g(x_0 + \delta x)\|,$$

где $f^+ = \max\{f, 0\}$. Назовем $\sigma(\delta x)$ функцией нарушения. Заметим, что $\Psi_0(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть множество Ω_η сильно сходится к множеству Ω_0 при $\eta \to 0$ и множество Ω_0 является сильным компактом* *.

Тогда теорема 1 остается справедливой при замене $\Phi_\eta(\delta x)$ на $\Psi_0(\delta x) + \eta\sigma(\delta x)$.

Теорема 3. *Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функционалы $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, непрерывно дифференцируемы по Фреше.*

Тогда теорема 1 остается справедливой при замене $\Phi_\eta(\delta x)$ на $\Phi_0(\delta x) + \eta\sigma(\delta x)$.

5. а) Теоремы 1, 2, 3 расположены по убыванию общности предположений.

б) Все теоремы остаются в силе, если выражение «при каждом $\eta > 0$» заменить на выражение «существует $\eta > 0$».

в) Если в точке x_0 множество $\Lambda_0 \neq \emptyset$ и $0 \notin \underset{\alpha_0}{\text{пр}}\, \Lambda_0$, то выполнение s-необходимости в точке x_0 эквивалентно существованию локального минимума в точке x_0 у функционала $f_0(x)$ при соответствующих ограничениях.

г) При невыполнении предположений теорем 2 и 3, эти теоремы становятся неверными как в пункте I, так и в пункте II.

д) Все теоремы обобщаются на случай, когда φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$,— выпуклые непрерывные функционалы. Однако существенное дальнейшее ослабление требований на функционалы f_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, и на оператор g, по-видимому, невозможно.

е) Многие задачи оптимального управления удовлетворяют требованиям п. 3. Сужение состоит в том, что ограничения на управлении и фазовые переменные должны быть заданы с помощью непрерывно дифференцируемых функций

Задачи оптимального управления без фазовых ограничений удовлетворяют условиям теоремы 2.

Задачи вариационного исчисления и динамического программирования удовлетворяют условиям теоремы 3.

Для задач оптимального управления без фазовых ограничений теорема 3, вообще говоря, не имеет места.

ж) Условия порядка γ. Пусть $\gamma(\delta x)$ — функционал в X такой, что $\gamma(\delta x) > 0$ при $\delta x \neq 0$; $\gamma(0) = 0$; $\gamma(\delta x)$ непрерывен в нуле.

Из теоремы 1, I следует, что условие

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta x \neq 0}} \frac{\Phi_\eta(\delta x)}{\gamma(\delta x)} \geqslant 0$$

есть необходимое условие минимума в точке x_0.

Из теоремы 1, II следует, что в условие

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta x \neq 0}} \frac{\Phi_\eta(\delta x)}{\gamma(\delta x)} > 0$$

есть достаточное условие существования строго локального минимума в точке x_0.

В предположениях теоремы 2 (3) в этих двух утверждениях функционал $\Phi_\eta(\delta x)$ можно заменить на $\Psi_0(\delta x) + \eta\sigma(\delta x)$ $(\Phi_0(\delta x) + \eta\sigma(\delta x))$. Для

---

* Эти условия заведомо выполнены, если оператор $g(x)$ конечномерный.

каждой из трех функций Φ_η, $\Psi_0+\eta\sigma$, $\Phi_0+\eta\sigma$ мы будем говорить о порядка γ необходимых или достаточных условиях, понимая под этим вышеприведенные неравенства.

Справедливы следующие

Утверждения. 1) *Выполнение порядка γ условий не зависит от выбора нормировки.*

2) *В предположениях теоремы* 3 *порядка γ условия для всех трех функций эквивалентны.*

3) *Известные в нелинейном программировании второго порядка условия есть порядка γ условия при $\gamma(\delta x)=\|\delta x\|^2$.*

Условия Якоби в вариационном исчислении есть порядка $\gamma(\delta x)=\int(\delta\dot{x})^2dt$ условия.

Примечание при корректуре.

Утверждение 4) *Пусть $\gamma(\delta x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в окрестности нуля и $\gamma'(0)=0$. Тогда γ-необходимость (γ-достаточность) в условиях теоремы* 1 *эквивалентна наличию строгого локального минимума в нуле у функционала $f_0(x_0+\delta x)+C\gamma(\delta x)$ при ограничениях $f_i(x_0+\delta x)+C\gamma(\delta x)\leqslant 0$, $i=1,\ldots,k$, $g(x_0+\delta x)=0$ для всех $C>0$ (при некотором $C<0$).*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, 3, 395 (1965).