Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 532.593 **ГИДРОМЕХАНИКА**

Э. Н. ПОТЕТЮНКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 25 1972)

В линейной постановке рассматривается задача о волновом движении вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины [1]:

$$\begin{gathered}\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nabla p + \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad p = p_r + z; \quad \zeta = \zeta_*(x, y),\\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_*(x, y, z), \quad t = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_* = 0;\\ \partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x = p_{*zx}, \quad \partial v_y / \partial z + \partial v_z / \partial y = p_{*zy},\\ -p + \zeta + 2\, \partial v_z / \partial z = -p_{*zz}, \quad \partial \zeta / \partial t = v_z, \quad z = 0;\\ p \to 0, \quad \mathbf{v} \to 0, \quad \mathbf{v}_* \to 0, \quad z \to -\infty; \quad \mathbf{F} \to 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty;\\ \mathbf{F} = \{p, \partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \mathbf{v}, \partial \mathbf{v} / \partial x, \partial \mathbf{v} / \partial y, \mathbf{v}_*, \zeta_*, \mathbf{p}_{*z}\},\\ \mathbf{p}_{*z} = \{p_{*zx}, p_{*zy}, p_{*zz}\} = \mathbf{p}_{*z}(x, y, t).\end{gathered} \tag{1}$$

Все величины, входящие в [1], безразмерные; с размерными они связаны соотношениями

$$t_1 = \nu^{1/3} g^{-2/3} t, \quad \mathbf{f}_1 = \nu^{2/3} g^{1/3} \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \{x, y, z, \zeta, \zeta_*\}, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}_1 = (\nu g)^{1/3} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_*\}, \quad \mathbf{q}_1 = \rho (\nu g)^{2/3} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \{p, p_r, \mathbf{p}_{*z}\}.$$

Применив к (1) интегральные преобразования, найдем решение задачи (1) в интегральной форме. В частности, для возвышения поверхности при $\mathbf{p}_{*z} = 0$, $\mathbf{v}_* = 0$ имеем

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} X(a, t)\, A_1 \Phi \zeta_*\, d\xi\, d\eta, \quad \Phi \zeta_* = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_* A_2\, dx\, dy,$$

$$X(a, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \chi(s)\, e^{s a^2 t}\, ds, \tag{3}$$

$$A_{1,2} = e^{\mp i(\xi x + \eta y)}, \quad \chi(s) = s^{-1}[1 - \Delta^{-1}(s)], \quad \Delta(s) = \lambda (s+2)^2 + 1 - 4\lambda (s+1)^{1/2},$$

$$\lambda = a^3, \quad a = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} > 0, \quad \operatorname{Re}(s+1)^{1/2} > 0, \quad s_0 > -1, \quad s_0 > \operatorname{Re} s_j,$$

$$\Delta(s_j) = 0.$$

Интегральная форма (3) была известна и ранее. Но в предыдущих работах при асимптотическом анализе для больших времен получались неверные результаты из-за необоснованного применения метода стационарной фазы. (Обсуждение этих работ проведено в [2].)

В данной работе разрабатываются асимптотические методы вычисления полученных квадратур при малых и больших временах, что позволяет полностью изучить поведение жидкости для всех времен $0 \leqslant t < \infty$. При ограниченных временах из результатов данной работы вытекают результаты работы [3].

Особыми точками функции $\chi(s)$ в (3) являются точка ветвления $s=-1$ и два корня уравнения частот $\Delta(s)=0$ [4].

Теорема 1. *Корни уравнения частот являются алгебраическими функциями параметра λ и представляются разложениями*

$$s_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^{1/4n}, & 0\leqslant|\lambda|<\lambda_*,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^{-n}, & |\lambda|>\lambda_*,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varepsilon_{1,2}^{n}, & \lambda_*-\delta\leqslant|\lambda|\leqslant\lambda_*+\delta,\quad \delta\geqslant\delta_0>0;\end{cases}$$

здесь $\lambda_*=[4b_*-(b_*^2+1)^2]^{-1}$, b_* *— положительный корень уравнения* $b_*^3+b_*-1=0$, c_n *— числовые коэффициенты* $\varepsilon_{1,2}=(\lambda_*^{-1}-\lambda^{-1})^{1/2}$.

Доказательство теоремы вытекает из теории об алгебраических и о неявных функциях ([5], т. 1, гл. 4, § 5; т. 2, гл. 8, § 6). Подставляя ряды (4) в уравнение частот и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем рекуррентные формулы для c_n.

Используя (4), устанавливаем, что в (2) надо положить

$$s_0>\max\{-1,\,-(2\lambda)^{-1}\}. \tag{5}$$

Для вычисления $X(a,t)$ функцию $\chi(s)$ представим в виде

$$\chi(s)=\psi_1(s)+\psi_2(s),\quad \psi_1(s)=s^{-1}\left\{1-\Delta_0^{-1}(s)\sum_{n=0}^{N}q^n-q^{N+1}\right\},$$
$$\psi_2(s)=q^{N+1}s^{-1}[1-\Delta^{-1}(s)],\quad q=4\lambda(s+1)^{1/2}\Delta_0^{-1}(s),\quad \Delta_0(s)=\lambda(s+2)^2+1. \tag{6}$$

Тогда $X(a,t)=\Psi_1(a,t)+\Psi_2(a,t)$ и для ζ имеем

$$\zeta=\zeta_1+\zeta_2,\quad \zeta_{1,2}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_{1,2}(a,t)\,e^{-i(\xi x+\eta y)}\,\Phi\zeta_*\,d\xi\,d\eta; \tag{7}$$

здесь $\Psi_{1,2}(a,t)$ — обращения по Лапласу функций $\Psi_{1,2}(s)$.

Теорема 2. *Если $\Phi\zeta_*$ убывает на бесконечности быстрее любой степени, то ζ_1 является асимптотическим представлением для ζ при $t\to0$.*

Для доказательства оценим по модулю ζ_2, положим $N=2K-1$ и воспользуемся формулами 3.165_2 из [6], 22.31, 22.194 из [7]. В результате находим

$$|\zeta-\zeta_1|<Ct^{3K},\quad C=\mathrm{const},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие теоремы 2. Тогда функция ζ_1 является асимптотическим представлением для ζ при $t\to\infty$.*

Для доказательства функции $\psi_{1,2}(s)$ в [6] преобразуем к виду

$$\psi_1(s)=\lambda\frac{s+4}{\Delta_0(s)}\sum_{n=0}^{N}q^n-\frac{4\lambda}{(s+1)^{1/2}+1}\,\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{n=0}^{N}q^n,\quad \psi_2(s)=r_1(s)+r_2(s);$$
$$r_1(s)=\lambda(s+4)\Delta^{-1}(s)q^{N+1},\quad r_2(s)=-4\lambda[(s+1)^{1/2}+1]^{-1}q^{N+1}\Delta^{-1}(s). \tag{8}$$

Используя разложение (4), неравенство (5) и формулы 22.31, 22.48, 22.149 из [7], 3.165_2, 8.461_1 из [6], выводим

$$|\zeta-\zeta_1|<CZ^{-m},\quad C=\mathrm{const},$$

m — любое положительное число, что и требовалось доказать.

П р и м е р. Рассмотрим случай плоского движения жидкости, вызванного начальным возмущением

$$\zeta_* = S\pi^{-1}b(b^2+x^2)^{-1}, \quad b>0. \tag{9}$$

Для первой стадии образования волны ($t\to 0$, x любое) и ее переднего фронта ($t\to\infty$, $|x|\to\infty$, $t/(b^2+x^2)=\varepsilon\to 0$, $t^2/(b^2+x^2)^{1/2}=\omega_1\leqslant c<\infty$) из (7) получаем полное асимптотическое разложение ζ. Первые члены этого разложения получены в ([3]) методом пограничного слоя (см. (4.24) в ([2])).

Волновая зона свободной поверхности ($t\to\infty$, $|x|\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, $bt^2/(b^2+x^2)=\varkappa\leqslant c<\infty$, $\omega_1\to\infty$, $\gamma=\varepsilon\omega_1{}^2\leqslant c<\infty$) описывается формулами

$$\zeta = -\frac{S\omega_1^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\,(b^2+x^2)^{1/2}}\left\{e^{-1/4\varkappa}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1/8\gamma)^n}{n!}\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{8n+3}{2}\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\right)\right\},\quad \gamma\to 0,$$
$$\gamma^N\sqrt{\omega_1}\to\infty,\quad \gamma^{N+1}\sqrt{\omega_1}\leqslant c<\infty,\quad \omega=t^2|x|/(b^2+x^2),\quad \varphi=\operatorname{arctg}(|x|/b), \tag{10}$$
$$\zeta=-\frac{S\sqrt{\omega_1}}{2\sqrt{\pi}\,(b^2+x^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{\varkappa}{4}-\frac{\gamma}{8}\cos 4\varphi\right]\left\{\sin\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\gamma}{8}\sin 4\varphi-\frac{3\varphi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\right)\right\},\quad \gamma=\mathrm{const}.$$

Для описания начальной стадии затухания волны ($t\to\infty$, $|x|\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, $\omega_1\to\infty$, $\gamma\to\infty$) имеем

$$\zeta=-\frac{2S}{\pi t^2}[1+o(1)]; \tag{11}$$

для заключительной стадии ($t\to\infty$, $\omega_1\to\infty$, $\varepsilon^{-1}\leqslant c<\infty$)

$$\zeta=-\frac{9}{4}\frac{S}{\pi t^2}[1+o(1)]. \tag{12}$$

Полученные формулы дают наглядное представление о зарождении, развитии и затухании волн, вызванных начальным возмущением (9).

Автор благодарит Л. С. Срубщика за обсуждение результатов работы.

Ростовский государственный университет
Ростов-на-Дону

Поступило
20 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Сретенский, Тр. ЦАГИ, № 541 (1941). [2] Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубщик, Л. Б. Царюк, ПММ, 34, в. 1 (1970). [3] Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубщик, ПММ, 34, в. 5 (1970). [4] Г. Гамб, Гидродинамика, М.— Л., 1947. [5] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Изд. 2, 1, 1967, 2, 1968. [6] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4, М., 1961. [7] В. А. Диткин, А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, М., 1965.