Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 533.6.01 АЭРОДИНАМИКА

А. Д. ХОНЬКИН

ОБ УРАВНЕНИЯХ ГИДРОДИНАМИКИ БЫСТРЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 29 IX 1972)

1. Рассмотрим однокомпонентную сплошную среду. Состояние такой среды будем описывать посредством гидродинамических параметров: массовой плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$, среднемассовой скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и плотности внутренней энергии $e(\mathbf{r}, t)$. Известно, что гидродинамические параметры состояния удовлетворяют следующим законам сохранения:

$$\begin{gathered}\rho_{,t} + (\rho u_\alpha)_{,\alpha} = 0,\\ \rho u_{\alpha,t} + \rho u_\beta u_{\alpha,\beta} = -p_{\alpha\beta,\beta},\\ e_{,t} + (eu_\alpha)_{,\alpha} = -p_{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta} - q_{\alpha,\alpha};\end{gathered} \tag{1}$$

здесь $p_{\alpha\beta}$, q_α — тензор плотности потока импульса и вектор плотности потока энергии соответственно в сопровождающей системе отсчета; греческие индексы, принимающие значения от 1 до 3, соответствуют осям декартовой системы координат; индексы, следующие после запятой, означают дифференцирование по соответствующей переменной; по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 3; для сокращения записи аргументы $(\mathbf{r}, t)$ у всех функций опущены.

Для построения модели гидродинамики сплошной среды необходимо найти зависимость потоков $p_{\alpha\beta}$ и q_α от параметров гидродинамического состояния. Для вязкой теплопроводной жидкости обычно используются законы Навье — Стокса и Фурье

$$\begin{gathered}p_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} - \mu D_{\alpha\beta} - \eta u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta},\\ q_\alpha = -\lambda T_{,\alpha};\end{gathered} \tag{2}$$

здесь p — давление, T — температура, $P_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений, $D_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - {}^2/_3 u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}$ — тензор скоростей деформаций, μ, η — коэффициенты вязкости, λ — коэффициент теплопроводности.

Подставляя соотношения (2) в уравнения (1) и используя термодинамические уравнения состояния $p = p(\rho, T)$, $e = e(\rho, T)$, получим замкнутую систему уравнений для описания движений вязкой теплопроводной среды.

Для среды, описываемой уравнениями состояния идеального газа $p = \rho RT$, $e = c_v\rho T$, коэффициент $\eta = 0$ и последнее уравнение системы (1) приводится к виду

$$\rho c_v(T_{,t} + u_\alpha T_{,\alpha}) = -p_{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta} - q_{\alpha,\alpha}. \tag{3}$$

Если в соответствии с этими уравнениями рассмотреть распространение возмущений в однородной покоящейся среде, то окажется, что возмущение любого гидродинамического параметра будет вести себя аналогично решению уравнения теплопроводности, т. е. если в момент времени $t = 0$ в некоторой точке $\mathbf{r}_0$ пространства задано возмущение, то в любой момент времени $t > 0$ в любой сколь угодно удаленной от $\mathbf{r}_0$ точке пространства это возмущение будет оказывать некоторое воздействие. В этом состоит парадокс бесконечной скорости распространения возмущений в вязкой теплопроводной среде, описываемой линейными феноменологическими соотношениями (2).

Применительно к задачам теплопроводности и диффузии этот парадокс обсуждался в ряде работ (см., например, ([1, 2])), и были предложены модели, обладающие конечной скоростью распространения возмущений. Было замечено, что если во второе соотношение (2) феноменологически включить член $\tau q_{\alpha,t}$ (τ — некоторое время релаксации), то вместо параболического уравнения теплопроводности получится уравнение гиперболического типа (телеграфное уравнение для температуры, см. (14)). В данной работе мы, используя методы неравновесной статистической механики применительно к кинетической теории газов, обобщим соотношения (2) и получим квазилинейную систему уравнений первого порядка гиперболического типа для описания гидродинамики быстрых процессов в вязкой теплопроводной жидкости.

2. В кинетической теории газов соотношения (2) получаются из уравнения Больцмана при помощи метода Чепмена — Энскога ([3]). Известно, что этот метод позволяет получить квазистационарные решения уравнения Больцмана ([4]).

В работе ([5]) предложен метод построения нормальных решений кинетического уравнения, пригодных для описания быстрых процессов. Для однокомпонентной среды были получены законы переноса, содержащие эффекты «памяти»:

$$P_{\alpha\beta} = -\int_{-\infty}^{t} M(t, t')\, D_{\alpha\beta}(t')\, dt',$$

$$q_\alpha = -\int_{-\infty}^{t} L(t, t')\, T_{,\alpha}(t')\, dt'. \tag{4}$$

Ядра интегральных соотношений (4) имеют вид

$$M(t, t') = \frac{1}{10}\int mc_\alpha c_\beta S(t, t')\left[\frac{F_0}{RT}\left(c_\alpha c_\beta - \frac{1}{3}c^2\delta_{\alpha\beta}\right)\right]_{t'} d\mathbf{c},$$

$$L(t, t') = \frac{1}{3}\int c_\alpha \frac{mc^2}{2} S(t, t')\left[\frac{F_0}{T} c_\alpha\left(\frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2}\right)\right]_{t'} d\mathbf{c}; \tag{5}$$

здесь m — масса молекулы, $\mathbf{c}$ — тепловая скорость молекул, F_0 — локально максвелловское распределение, нормированное на плотность числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$, индекс t' означает, что временной аргумент у функций, стоящих в скобках, равен t'. Оператор $S(t, t')$ определяется соотношениями

$$\partial S(t, t') / \partial t = L_t S(t, t'), \quad S(t, t) = 1, \tag{6}$$

где L_t — линеаризованный оператор столкновений Больцмана.

Преобразуем интегральные законы переноса (4) к дифференциальной форме. Отметим, что

$$M(t, t) = p, \quad L(t, t) = {}^5/_2 Rp = c_p p. \tag{7}$$

Кроме того, отметим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} L_t(mc_\alpha c_\beta) \cong (p/\mu)\, m(c_\alpha c_\beta - {}^1/_3 c^2\delta_{\alpha\beta}), \\ L_t({}^1/_2 c_\alpha mc^2) \cong (c_p p/\lambda)\, mc_\alpha({}^1/_2 c^2 - {}^5/_2 RT), \end{gathered} \tag{8}$$

которые являются точными для максвелловских молекул и служат хорошим приближением для других моделей потенциалов межмолекулярного взаимодействия. Дифференцируя соотношения (4) по t и используя свойства (7) и (8), получаем

$$P_{\alpha\beta,t} = -pD_{\alpha\beta} - (p/\mu)P_{\alpha\beta}, \quad q_{\alpha,t} = -c_p pT_{,\alpha} - (c_p p/\lambda)q_\alpha. \tag{9}$$

Первые два уравнения системы (1), уравнения (3) и (9) совместно с уравнением состояния идеального газа образуют замкнутую систему уравнений гидродинамики быстрых процессов в газовых средах. Отметим, что в соотношения (9) вошли лишь общие макроскопические характеристики среды и они, по-видимому, пригодны для описания быстрых процессов в плотных средах.

3. Отметим некоторые свойства полученной системы уравнений гидродинамики. В стационарном случае, когда характеристики среды не зависят от времени, левые части соотношений (9) обращаются в нуль, и соотношения (9) сводятся к известным законам (2).

На примере одномерного течения рассмотрим свойства полученной системы уравнений. В этом случае все функции зависят лишь от одной координаты x и отличны от нуля лишь компоненты $u_1 = u$ скорости, $q_1 = q$ вектора теплового потока и $P_{11} = P$ тензора напряжений. Для нахождения характеристических направлений рассмотрим уравнения в сопровождающей системе отсчета $(u = 0)$

$$\begin{gathered}
\rho_{,t} + \rho u_{,x} = 0,\\
\rho u_{,t} + p_{,x} + P_{,x} = 0,\\
p_{,t} + ({}^5/{}_3 p + {}^2/{}_3 P) u_{,x} + {}^2/{}_3 q_{,x} = 0,\\
P_{,t} + {}^4/{}_3 p u_{,x} + (p / \mu) P = 0,\\
q_{,t} + {}^5/{}_2 RT p_{,x} - {}^5/{}_2 (RT)^2 \rho_{,x} + (5p / 2\lambda) q = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Легко получить выражения для характеристических направлений системы (10). Характеристические направления для системы уравнений в лабораторной системе отсчета отличаются от характеристических направлений системы (10) на величину u. В итоге получаем пять действительных характеристических направлений:

$$(dx / dt)_1 = u, \qquad (dx / dt)_{2,3} = u \pm \alpha c, \qquad (dx / dt)_{4,5} = u \pm \beta c, \tag{11}$$

где $c = (\gamma RT)^{1/2}$ — скорость звука, $\gamma = (c_p / c_v)$ — показатель адиабаты,

$$\alpha = \left\{ \frac{7}{5} + \frac{P}{5p} + \left[\left(\frac{7}{5} + \frac{P}{5p} \right)^2 - \frac{17}{5} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \tag{12}$$

а выражение для β отличается лишь знаком перед квадратной скобкой от выражения для α. Таким образом, рассматриваемая система уравнений является квазилинейной системой гиперболического типа.

Рассмотрим теперь процесс переноса тепла в покоящейся среде $(u = 0)$, описываемой уравнением (3) и вторым соотношением (9). После линеаризации получаем

$$\begin{gathered}
\rho_0 c_v T_{,t} + q_{\alpha,\alpha} = 0,\\
q_{\alpha,t} + c_p p_0 T_{,\alpha} + (c_p p_0 / \lambda_0) q_\alpha = 0
\end{gathered} \tag{13}$$

(индексом 0 отмечены невозмущенные величины). Исключая q_α из уравнений (13), получаем уравнение для определения температуры

$$T_{,tt} = c_0^2 T_{,\alpha\alpha} - (c_0^2/a^2) T_{,t}, \tag{14}$$

где $a^2 = (\lambda_0 / (\rho_0 c_v))$ — коэффициент температуропроводности, $c_0 = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ — невозмущенная скорость звука.

Таким образом, для описания нестационарных движений однокомпонентной среды получена квазилинейная система уравнений гиперболического типа. Возмущения переносятся с конечной скоростью, равной скорости звука в невозмущенной среде.

Центральный аэродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского
Москва

Поступило
26 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. V. Lykov, Int. J. Heat Mass Transfer, 9, 2, 139 (1966). [2] Е. В. Толубинский, Теория процессов переноса, 1969. [3] С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960. [4] В. В. Струминский, ДАН, 165, № 2 (1965). [5] Д. Н. Зубарев, А. Д. Хонькин, Теоретич. и математич. физ., 11, 403 (1972).