Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 2

УДК 517.946.82 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ЛЕОНТОВИЧ

ЗАДАЧА КОШИ И СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СИСТЕМ КВАЗИ-ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 I 1973)

В работе рассмотрены задача Коши и смешанная задача для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной по времени t. Впервые такие уравнения были рассмотрены С. Л. Соболевым [1], а затем другими авторами [2–6].

В настоящей работе рассматриваются системы вида

$$M\,\partial u\,/\,\partial t + Lu = 0, \tag{1}$$

$u = u(x, t)$ — вектор-функция, $x = (x_1, \ldots, x_n)$;

$$M = \sum_{m_1 \leqslant |\alpha|,\, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_{\alpha\beta} D^\beta, \quad L = \sum_{l_1 \leqslant |\gamma|,\, |\delta| \leqslant l} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma A_{\gamma\delta} D^\delta;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — мультииндексы, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$; $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots$ $\ldots \partial x_n^{\alpha_n}$; $B_{\alpha\beta}(x, t)$, $A_{\gamma\delta}(x, t)$ — квадратные матрицы, элементы которых зависят от x, t.

1. Ставится задача Коши: в полосе $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ найти решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2}$$

Введем понятие обобщенного решения задачи (1), (2).

Пусть $s_1 \leqslant m_1 \leqslant m \leqslant s$. Рассмотрим совокупность функций $u(x, t)$, определенных в Π, бесконечно дифференцируемых, каждая $u(x, t) = 0$ вне некоторого $Q = \{|x_i| \leqslant a_i, 0 \leqslant t \leqslant T\}$; замыкание в полунорме

$$\|u\|^2_{[s_1, s]} = \iint\limits_{\Pi} \sum_{s_1 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha u|^2\, dx\, dt$$

обозначим $\mathscr{D}^{[s_1, s], 0}(\Pi)$.

Обозначим $\mathscr{D}^{[s_1, s][m_1 m]1}(\Pi)$ замыкание в полунорме

$$\|\Phi\|^2_{[s_1, s], [m_1, m]} = \iint\limits_{\Pi} \Big(\sum_{s_1 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha \Phi|^2 + \sum_{m_1 \leqslant |\beta| \leqslant m} \Big| \frac{d}{dt} D^\alpha \Phi \Big|^2 \Big)\, dx\, dt$$

совокупности бесконечно дифференцируемых функций $\Phi(x, t)$, определенных в Π, $\Phi(x, t) = 0$ вне некоторого $Q_\delta = \{|x_i| < a_i,\ 0 \leqslant t \leqslant T - \delta\}$.

Обозначим $\mathscr{D}^{[s_1, s]}(R^n)$ замыкание в полунорме

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_{R^n} \sum_{s_1 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha \varphi|^2\, dx$$

совокупности гладких функций $\varphi(x)$, определенных в Π, $\varphi(x) = 0$ вне $\Omega = \{|x_i| < a_i\}$.

Заметим, что элементы определенных выше пространств есть функционалы над $K(\Pi)$ (или $K(R^n)$), они определяются с точностью до полинома по x порядка $s_1 - 1$, где $K(\Pi)$ — пространство финитных функций $f(x, t)$, бесконечно дифференцируемых в П, $f(x,t)=0$ вне некоторого

$$Q_\delta' = \{|x_i| \leqslant a_i, \quad \delta \leqslant t \leqslant T-\delta\}.$$

$K(R^n)$ — пространство финитных функций $f(x)$, определенных в П, $f(x) = 0$ вне некоторого $\Omega = \{|x_i| \leqslant a_i\}$.

Во всех определениях предполагается, что для различных функций величины a_i и δ, вообще говоря, различные.

Обозначим $\mathring{\mathscr{D}}^s(R^n)$ совокупность функций $\varphi(x)$, s раз непрерывно дифференцируемых в R^n, равных нулю при больших $|x|$, $\mathscr{D}^s(R^n) \subset \mathscr{D}^{[s_1,s]}(R^n)$.

Определение 1. Назовем обобщенным решением задачи (1), (2) функцию $u(x,t) \in \mathscr{D}^{[s_1,s],0}(\Pi)$, $s_1 = \min(m_1, l_1)$, $s = \max(m, l)$, удовлетворяющую тождеству

$$\iint\limits_{\Pi}\Big\{-\sum_{\alpha,\beta}\Big(B_{\alpha\beta}D^\beta u, \frac{\partial}{\partial t}D^\alpha\Phi\Big) - \sum_{\alpha,\beta}\Big(\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial t}D^\beta u, D^\alpha\Phi\Big) + \\ + \sum_{\gamma,\delta}(A_{\gamma\delta}D^\delta u, D^\gamma\Phi)\Big\}dx\,dt - \int\limits_{R^n}\sum_{\alpha,\beta}(B_{\alpha\beta}(x,0)D^\beta\varphi(x), D^\alpha\Phi|_{t=0})\,dx = 0 \tag{3}$$

при любой $\Phi = \mathscr{D}^{[s_1,s][m_1,m]1}(\Pi)$. При этом предполагается, что $\varphi(x) \in \mathscr{D}^{[m_1,m]}(R^n)$, а $B_{\alpha\beta}$, $\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial t}$, $A_{\gamma\delta}$ ограничены в П.

Определение 2. Назовем систему (1) сильно квазипараболической, если $l_1 \geqslant m_1$ и

1) оператор M симметричен в том смысле, что

$$B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}^* \tag{4}$$

(звездочка означает эрмитову сопряженность);

2) оператор M положительно определен в том смысле, что при всех x, t

$$\sum_{\alpha,\beta}(B_{\alpha\beta}w^\beta, w^\alpha) \geqslant b\sum_{m_1 \leqslant |\alpha| \leqslant m}|w^\alpha|^2, \quad b = \text{const} > 0, \tag{5}$$

где w^β — произвольный вектор, свой для каждого из мультииндексов β;

3) оператор L может быть таким образом представлен в виде $L = L_0 + L_1$, где

$$L_0 = \sum_{l_0 \leqslant |\gamma|, |\delta| \leqslant l}(-1)^{|\gamma|}D^\gamma A_{\gamma\delta}D^\delta, \quad l_0 \geqslant l_1,$$

а L_1 содержит все остальные члены (общий порядок дифференцирования оператора L_1 не превосходит $2l-1$), что L_0 имеет положительно определенную действительную часть:

$$\operatorname{Re}\sum_{l_0 \leqslant |\gamma|, |\delta| \leqslant l}(A_{\gamma\delta}w^\delta, w^\gamma) \geqslant a\sum_{l_0 \leqslant |\delta| \leqslant l}|w^\delta|^2, \quad a = \text{const} > 0. \tag{6}$$

Если $m \geqslant l$, то не требуется выполнения условия 3).

Отметим, что, если $m < l$ и система сильно квазипараболична, то корни характеристического уравнения

$$\det[M(x,t,\xi)\lambda + L_0(x,t,\xi)] = 0, \tag{7}$$

где

$$M(x,t,\xi) = \sum_{m_1 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m}(-1)^{|\alpha|}B_{\alpha\beta}\xi^\alpha \cdot \xi^\beta i^{|\alpha|+|\beta|},$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}, \quad L_0(x,t,\xi) = \sum_{l_0 \leqslant |\gamma|, |\delta| \leqslant l}(-1)^{|\gamma|}A_{\gamma\delta}\xi^\gamma \cdot \xi^\delta i^{|\gamma|+|\delta|},$$

имеет отрицательную действительную часть при $|\xi| \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть система сильно квазипараболична.*

1) *Если коэффициенты непрерывны и ограничены в* Π, *а коэффициенты оператора* M *имеют непрерывную ограниченную производную по* t, $\varphi(x) = \mathscr{D}^m(R^n)$, *то существует обобщенное решение задачи Коши* (1), (2).

2) *Если, кроме того, коэффициенты оператора* M *имеют ограниченную производную по* t *второго порядка, а коэффициенты оператора* L *первого порядка и оператор* L *симметричен, т. е.* $A_{\gamma\delta} = A_{\delta\gamma}^*$, *то обобщенное решение единственно с точностью до полинома по* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *порядка* $s_1 - 1$, $s_1 = \min(m_1, l_1)$.

Определение 3. Назовем систему (1) системой квази-Шредингера, если $l_1 \geqslant m_1$, и

1) оператор M удовлетворяет условиям (4) и (5), т. е. он симметричен и положительно определен;

2) $L = i\tilde{L}$, оператор $\tilde{L}$ может быть таким образом представлен в виде $\tilde{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_1$ $\left(\tilde{L}_0 = \sum\limits_{l_0 \leqslant |\gamma|, |\delta| \leqslant l} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma \tilde{A}_{\gamma\delta} D^\delta,\ l_0 \geqslant l_1,\right.$ а $\tilde{L}_1$ содержит все остальные члены, $\tilde{L}_0$ и $\tilde{L}_1$ — симметричные операторы в том же смысле, что и M), что $\tilde{L}_0$ знакоопределен, т. е.

$$\Big|\sum_{l_0 \leqslant |\gamma|, |\delta| \leqslant l} (\tilde{A}_{\gamma\delta} w^\gamma, w^\delta)\Big| \geqslant a \sum_{l_0 \leqslant |\delta| \leqslant l} |w^\delta|^2, \quad a = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Если выполнены эти условия, то все корни уравнения (7), $L_0 = i\tilde{L}_0$, чисто мнимые при $|\xi| \neq 0$.

Уравнение Шредингера с одной пространственной переменной рассмотрено в ([7]).

Теорема 2. *Рассмотрим систему квази-Шредингера.*

1) *Если коэффициенты системы непрерывны, ограничены в* Π, *имеют непрерывную ограниченную производную по* t *первого порядка,* $\varphi(x) \in \mathscr{D}^s(R^n)$, *то существует обобщенное решение задачи Коши* (1), (2).

2) *Если, кроме того, коэффициенты оператора* M *не зависят от* t, *то решение единственно с точностью до полинома по* x *порядка* $s_1 - 1$.

Для доказательства единственности в тождество (3) подставляется специальным образом выбранная функция $\Phi(x, t) \in \mathscr{D}^{[s_1, s][m_1, m]1}(\Pi)$ и используются неравенства (5) и (6) или (5) и (8).

Чтобы доказать существование обобщенного решения задачи Коши (1), (2), предварительно рассматривается смешанная задача: в

$Q = \{x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}, \quad \Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n), \quad a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$

найти решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u = \frac{\partial}{\partial x_i} u = \ldots = \frac{\partial^{s_1-1}}{\partial x_i^{s_1-1}} u = 0 \text{ при } x_i = a_i \text{ и } x_i = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n; \tag{9}$$

$$u|_{t=0} = \psi(x), \quad \psi(x) = 0 \text{ при } x_i = a_i \text{ и при } x_i = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

2. Вводится понятие обобщенного решения смешанной задачи (1), (9), (10), аналогичное понятию обобщенного решения задачи Коши.

Теорема 3. *Пусть система* (1) *сильно квазипараболическая. Пусть в* Q *коэффициенты удовлетворяют условию* 1) *теоремы* 1, *начальная функция* $\psi(x)$ m *раз непрерывно дифференцируема по* x *в* Ω.

Тогда существует обобщенное решение $u(x, t)$ *смешанной задачи* (1), (9), (10); *оно удовлетворяет оценке*

$$\iint_Q \sum_{s_1 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha u|^2 \,dx\,dt \leqslant c_1 \int_\Omega \sum_{m_1 \leqslant |\beta| \leqslant m} |D^\beta \psi|^2 \,dx, \tag{11}$$

где $D^\alpha u$ — *производные в смысле Соболева. Если выполнено условие* 2) *теоремы* 1, *то решение задачи* (1), (9), (10) *единственно.*

Теорема 4. *Пусть система 1 есть система квази-Шредингера. Пусть в Q выполнены условия 1) теоремы 2, начальная функция $\psi(x)$ s раз непрерывно дифференцируема в Ω.*

Тогда существует обобщенное решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1) (9), (10); *оно удовлетворяет оценке*

$$\iint\limits_Q \sum_{s_1 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha u|^2 \, dx \, dt \leqslant c_2 \int\limits_\Omega \sum_{s_1 \leqslant |\beta| \leqslant s} |D^\beta \psi|^2 \, dx. \tag{12}$$

Решение единственно, если выполнено условие 2) *теоремы* 2.

Константы c_1, c_2 в оценках (11), (12) *не зависят от размеров по x прямоугольника Q.*

Доказательство существования обобщенного решения задачи (1), (9), (10) ведется методом конечных разностей. Подобный метод был применен в (8). В нашем случае использована система разностных уравнений с неявной схемой. В схеме участвуют точки сетки на двух слоях. На слое $t = t_0 - \tau$ участвуют $(2m)^n$ точек сетки, а на слое $t = t_0 - (2s)^n$ точек. Эти точки являются узлами сетки, которые лежат в соответствующих параллелепипедах в гиперплоскостях $t = \mathrm{const}$, с центрами в точках $(x_0, t_0 - \tau)$ и (x_0, t_0), где (x_0, t_0) — рассматриваемая точка сетки.

По значениям сеточной функции, которая является решением системы разностных уравнений, строятся вспомогательные функции, определенные во всех точках Q. Решение системы разностных уравнений удовлетворяет оценке энергетического типа, не зависящей от шагов сетки. Из этой оценки следует единственность и, значит, существование системы разностных уравнений. Вспомогательные функции удовлетворяют интегральным оценкам, также не зависящим от шагов сетки. Поэтому существует подпоследовательность сеток такая, что соответствующие ей функции сходятся слабо в L_2. Предельная функция удовлетворяет оценке (11) или (12) и есть обобщенное решение задачи (1), (9), (10).

Существование обобщенного решения задачи Коши (теоремы 1 и 2) вытекает из теорем 3 и 4 и следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты системы* (1) *ограничены в* Π, *а коэффициенты оператора M имеют ограниченную производную по t. Пусть в любом прямоугольнике Q смешанная задача* (1), (9), (10) *имеет обобщенное решение $v(x, t)$ при условии, что начальная функция ψ s раз непрерывно дифференцируема в Q, и пусть это решение удовлетворяет оценке*

$$\iint\limits_Q \sum_{s_1 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha v|^2 \, dx \, dt \leqslant c \int\limits_\Omega \sum_{r_1 \leqslant |\beta| \leqslant r} |D^\beta \psi|^2 \, dx,$$

где c не зависит от размеров Q (у всех Q высота T предполагается одной и той же).

Тогда задача Коши (1), (2) *с любой начальной функцией $\varphi(x) \in \mathscr{D}^r(R^n)$ имеет обобщенное решение.*

Переход от смешанной задачи к задаче Коши при помощи увеличения размеров области по x был сделан в ([9]).

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить С. А. Гальперна за постановку задачи и постоянную помощь при ее решении.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 9 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Известия АН СССР, сер. матем., 18, № 1 (1954). [2] С. А. Гальперн, Труды Моск. матем. общ., **9** (1960). [3] А. Г. Костюченко, Г. И. Эскин, Тр. Моск. матем. общ., **10** (1960). [4] И. Е. Сигалов, Вестник Московского университета; матем., мех., № 5, (1970). [5] М. И. Вишик, Матем. сборн., нов. сер., **39** (81), № 1. [6] Б. Р. Вайнберг, ДАН, **136**, № 5 (1961). [7] Ю. В. Сидоров, Матем. сборн., нов. сер., **74** (116), № 4 (1967). [8] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953. [9] О. А. Олейник, Т. Д. Вентцель, Матем. сборн., **41** (83) (1957).