Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 2

УДК 532.592 ГИДРОМЕХАНИКА

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

О КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ НАД ВОЛНИСТЫМ ДНОМ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 17 VIII 1972)

Дается точное решение задачи, если давление на поверхности постоянно, а плоская линия дна является волнообразной периодической кривой, заданной некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Исследуется и особый случай, когда длина дуги волны линии дна совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока при горизонтальном плоском дне. Здесь кратко излагаются полученные нами результаты; основные из них были доложены нами на XIII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике в Москве (21—26 августа 1972 г.) ([1]).

В нашей работе ([2]) впервые была рассмотрена аналогичная задача методом Т. Леви-Чивита, сводящим ее к решению нелинейных дифференциальных уравнений; однако указанный выше особый случай рассмотрен не был. Здесь задача сводится к решению системы нелинейных интегральных и трансцендентных уравнений.

Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление p предполагается постоянным и равным p_0; снизу жидкость ограничена волнистым дном, которое пересекается вертикальной плоскостью течения по периодической волнообразной линии L — линии дна. Пусть поток обладает постоянной заданной средней горизонтальной скоростью c при $y=0$ (см. ниже) и направленной слева направо. Благодаря периодичности линии дна свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющий скорость $-c$.

Пусть гребень искомой волны и гребень линии L будут расположены на одной и той же вертикали и пусть волна и линия дна обладают симметрией относительно этой вертикали и вертикали линии дна у середины ее впадины. Совместим ось Oy прямоугольной системы координат xOy с осью симметрии у гребня и направим ее вертикально вверх; за начало координат примем точку пересечения оси Oy с линией дна, а ось Ox направим вправо по горизонтальной касательной к линии дна. Пусть период по x (или длина волны) линии дна равен λ. Примем угол с осью Ox, образованный касательной к линии L, заданным в виде функции $\Theta(s)$ длины ее дуги s; обозначив через $2l$ длину дуги линии L за период по x, предполагаем, что

$$\Theta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\beta_n\sin\frac{n\pi s}{l}, \tag{1}$$

где ε — малый безразмерный положительный параметр, β_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum\varepsilon^n\beta_n$ сходится в круге радиуса $\varepsilon_0>0$. Из параметрических уравнений линии L вытекает, что

$$\lambda=\lambda_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varepsilon^n;\quad \lambda_0=2l,\quad \lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\frac{\beta_1^2 l}{2},\quad \lambda_3=0; \tag{2}$$

λ_n, $n=4, 5, \ldots$,— полиномы по β_i. Предполагается, что длина волны на поверхности жидкости также равна λ.

Плоскость течения xOy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей; ψ — функция тока; $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей.

Для вывода уравнений задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной на прямоугольник $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$ в плоскости w (здесь $\psi = \psi_0$ — расход потока в единицу времени; $\varphi_0 = \lambda c$), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в нуле плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга единичного радиуса, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса $r_0 = \exp(-2\pi\psi_0/\varphi_0)$ меньшего единицы. Кольцо имеет разрез $(r_0, 1)$.

Выражение z через u определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\,\frac{\exp[i\omega(u)]}{u}; \tag{3}$$

здесь

$$\omega(u) = \Phi + i\tau. \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса-вектора с осью u_1) дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta. \tag{5}$$

Из предыдущего следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу вектора скорости $\mathbf{q}$ с осью Ox и что

$$q = |\mathbf{q}| = c\exp(\tau). \tag{6}$$

В силу симметрии искомой волны функция $\tau(\theta) = \tau(1, \theta)$ четная, а $\Phi(\theta) = \Phi(1, \theta)$ — нечетная. Поэтому имеем разложения

$$-\tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta, \quad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin n\theta.$$

Для функций $\tau^*(\theta) = \tau^*(r_0, \theta)$ и $\Phi^*(\theta) = \Phi^*(r_0, \theta)$ справедливы аналогичные разложения, но с другими A_n^* и B_n^*, $n = 1, 2, \ldots$

Из интеграла Бернулли для поверхности, учтя по закону Лапласа силы поверхностного натяжения, после выделения линейных относительно Φ и τ слагаемых и определения y по второй формуле (5), получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left\{\delta - 1 - (\delta+1)\tau + \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta + F[\tau, \Phi, \delta]\right\}, \tag{7}$$

$$F[\tau, \Phi, \delta] = \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^{\tau} - 1 - \tau) +$$
$$+ \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta [e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta) - \Phi(\eta)]\,d\eta + \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta - \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta,$$

где

$$\delta = 2(C\rho - p_0)/\rho c^2, \quad \nu = \lambda c^2\rho/4\pi\mu = \nu^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\nu^{(n)}\varepsilon^n, \quad \nu^{(0)} = c^2\rho\lambda_0/4\pi\mu,$$

$$\varkappa = g\lambda/\pi c^2 = \varkappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\varepsilon^n, \quad \varkappa_0 = g\lambda_0/\pi c^2,$$

$$\nu^{(n)} = (\nu^{(0)}/\lambda_0)\lambda_n, \quad \varkappa_n = (\varkappa_0/\lambda_0)\lambda_n;$$

C — константа в интеграле Бернулли, g — ускорение силы тяжести, μ — капиллярная постоянная.

Преобразуем в (7) слагаемые, линейные относительно функций и ε, применяя интегральные формулы, выражающие τ и τ^* через $d\Phi/d\theta$ и $d\Phi^*/d\theta$, обобщающие формулы Дини для круга ([3]), и интегрирование по частям. Затем в фигурной скобке — множители при $\nu^{(0)}$ — объединяем слагаемые с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi/d\eta$ и с разными ядрами:

$$K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{\nu_n'}, \quad K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n^2},$$

где $\nu_n' = n \operatorname{th}(2\pi n \psi_0/\varphi_0)$.

В уравнении (7) константы $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$, зависящие от c и l, считаются заданными, а δ определяется из условия периодичности $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$.

Из этого условия при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\delta = 1 + \delta'(\varepsilon). \tag{8}$$

После всех преобразований и с учетом (8) уравнение (7) примет окончательный вид

$$\begin{aligned} \zeta(\theta) = \nu^{(0)} \Big\{ \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \delta'(\varepsilon) - 2(2 + \delta'(\varepsilon)) \int_0^{2\pi} N(\eta, \theta)\, \zeta^*(\eta)\, d\eta + \\ + (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 + \delta'(\varepsilon) \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \Psi(\theta, \varepsilon) \Big\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} \varepsilon^n \Big\{ 2 \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta - \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \ldots \Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

(многоточие во второй фигурной скобке заменяет члены из первой, начиная со второго); здесь $\zeta(\theta) = d\Phi/d\theta$, $\zeta^*(\theta) = d\Phi_*/d\theta$,

$$N(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{\nu_n^*}, \quad \frac{4}{\nu_n^{*2}} = \frac{1}{\nu_n'^2} - \frac{1}{n^2}, \quad \nu_n' \nu_n'' = n^2,$$

$$\Psi(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \varepsilon^n \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta + F[\tau, \Phi, 1 + \delta'(\varepsilon)], \tag{10}$$

$$K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta)\, \varphi_n(\theta)}{\nu_n}, \quad \nu_n = \frac{n^2}{2\nu_n'' - \varkappa_0}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}};$$

ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$.

Если считать, что в выражении Ψ функция $\tau(\theta)$ взята из ([3]) и $\Phi(\theta) = \int_0^{\theta} \zeta(\eta)\, d\eta$, то (9) будет нелинейным интегральным уравнением для $\zeta(\theta)$.

Условие периодичности функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\begin{aligned} \delta'(\varepsilon) = -\varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\, \zeta(\eta)\, d\eta - (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, \varepsilon)\, d\theta - \\ - \frac{1}{2\pi\nu^{(0)}} \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} \varepsilon^n \Big\{ \Big[\delta'(\varepsilon) + (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 + \\ + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\, \zeta(\eta)\, d\eta \Big] 2\pi + \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, \varepsilon)\, d\theta \Big\}. \end{aligned} \tag{11}$$

На дне должно выполняться условие обтекания, которое в силу (1) и после дифференцирования примет вид

$$\zeta^*(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\beta_n\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi s(\theta)}{l}\cdot\frac{ds(\theta)}{d\theta}. \qquad (12)$$

Отсюда видно, что необходимо найти функцию $s(\theta)$ на дне. Из (3) и (4) при $r=r_0$ и, так как $ds=|dz|$, получаем

$$s(\theta)=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\theta}\exp\left[-\tau^*(\eta)\right]d\eta; \qquad (13)$$

здесь приписан знак минус, чтобы отрицательным приращениям θ отвечали положительные приращения s.

Коэффициент A_0 в (9) выбирается так, чтобы длина дуги линии дна, отвечающая периоду, равнялась заданной величине $2l$. Согласно (13), это дает

$$2l\exp(-A_0)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[-\tau^*(-\eta)-A_0\right]d\eta. \qquad (14)$$

Таким образом, задача свелась к определению трех функций $\zeta(\theta,\varepsilon)$, $\zeta^*(\theta,\varepsilon)$, $s(\theta,\varepsilon)$ и двух констант $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ из системы пяти нелинейных уравнений (9), (11), (12), (13) и (14) с учетом интегральных формул ([3]) для $\tau(\theta)$ и $\tau^*(\theta)$ и при $\Phi(\theta,\varepsilon)=\int_0^{\theta}\zeta(\eta,\varepsilon)d\eta$, $\Phi^*(\theta,\varepsilon)=\int_0^{\theta}\zeta^*(\eta,\varepsilon)d\eta$. При решении основным является нелинейное интегральное уравнение (9). Приходится рассматривать два случая: в первом случае $\nu^{(0)}\neq\nu_n$, во втором $\nu^{(0)}=\nu_n$. Как и в ([5]), отметим, что $\nu^{(0)}=\nu_n$ (10) является тем особым случаем, который указан в начале статьи.

В первом случае решение $\zeta(\theta,\varepsilon)$, $\zeta^*(\theta,\varepsilon)$, $s(\theta,\varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Во втором случае в качестве примера рассмотрено значение $\nu^{(0)}=\nu_1$, где собственное значение ν_1 простое и положительное ([5]). Здесь решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях, применяя методы Ляпунова — Шмидта ([4]), доказываем, что эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ и малых значениях $|\varepsilon|<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ и дают единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение задачи.

До конца рассчитаны первые три приближения решения задачи. Получено приближенное уравнение профиля волны. Анализ главного члена этого уравнения показал, что в зависимости от знака β_1 над гребнем линии дна может находиться как гребень, так и впадина волны на поверхности жидкости.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. И. Секерж-Зенькович, XIII Международн. конгр. по теоретич. и прикл. мех. Сборн. аннот., 1972, стр. 97. [2] Я. И. Секерж-Зенькович, В сборн. Приложения теории функций в механике сплошной среды, Тр. Международн. симпоз., Тбилиси, 1963 г., 2, «Наука», 1965, стр. 362. [3] А. И. Некрасов, Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, Изв. АН СССР, 1951; собр. соч., 1, Изд. АН СССР, 1961. [4] М. М. Вейнберг, В. А. Треногин, УМН, **17**, в. 2 (104), 13 (1962). [5] Я. И. Секерж-Зенькович, ДАН, **202**, № 4, 787 (1972).