Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 2

УДК 517.392;518.12;511.9 *МАТЕМАТИКА*

И. М. СОБОЛЬ

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 21 VII 1972)

Пусть $P_1, \ldots, P_N, \ldots$ — последовательность точек, равномерно распределенных (р.р.) в единичном кубе $K^n = \{0 \leqslant x_k \leqslant 1;\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Согласно известной теореме Г. Вейля (см. [1] или [2]), для любой интегрируемой по Риману в K^n (и, стало быть, ограниченной) функции $f(P)$ имеет место соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} f(P_\mu) = \int_{K^n} f(P)\,dP, \tag{$*$}$$

где $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $dP = dx_1, \ldots, dx_n$.

В работе получены условия справедливости $(*)$ для неограниченных $f(P)$, когда интеграл справа несобственный. В частности, оказалось, что если в качестве P_μ выбрать точки $ЛП_\tau$-последовательностей из [2], то соотношение $(*)$ справедливо для функций $f(P)$ с любыми степенными особенностями в начале координат и на примыкающих к началу гранях K^n.

Полученные результаты заметно расширяют класс алгоритмов Монте-Карло, при реализации которых можно вместо n-мерных случайных точек использовать точки $ЛП_\tau$-последовательности, и включают даже алгоритмы с бесконечной дисперсией.

1. Одномерные задачи.

1.1. Предварительные замечания. Рассмотрим произвольные точки $x_1, \ldots, x_N$ из интервала $(0, 1)$. Отклонением этих точек называется величина

$$D_N = \sup_l |S_N(l) - N|l||,$$

где l — произвольный интервал $[a, b) \subseteq [0, 1]$, $|l| = b - a$ — его длина, а $S_N(l)$ — количество точек, принадлежащих l.

Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно для того, чтобы последовательность точек $x_1, \ldots, x_N, \ldots$ была р.р. в $[0, 1]$:

1°) для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} f(x_\mu) = \int_0^1 f(x)\,dx; \tag{1}$$

2°) отклонение $D_N = o(N)$, когда $N \to \infty$.

Обозначим через U_ξ множество функций $f(x)$ дифференцируемых при $x \neq \xi$, неограниченных при $x \to \xi$, для которых существует несобственный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Нетрудно доказать, что для каждой $f(x)$ из U_ξ найдется р.р. последовательность x_μ такая, что (1) не имеет места [3, 4], а для каждой р.р. последовательности x_μ найдется $f(x)$ из U_ξ такая, что (1) не имеет места. Следовательно, условия, достаточные для справедливости (1), должны связывать свойства x_μ и $f(x)$.

1.2. Функции, не ограниченные при $x \to 0$. Пусть $a_N = \min x_\mu$, когда $1 \leqslant \mu \leqslant N$. Очевидно, для любой р.р. последовательности $a_N \to 0$, когда $N \to \infty$.

Теорема 1. *Если последовательность x_μ и функция $f(x)$ из U_0 удовлетворяют при $N \to \infty$ условию*

$$D_N \int_{a_N}^{1} |f'(x)|\, dx = o(N), \tag{2}$$

то справедливо соотношение (1).

Схема доказательства. Используется тождество

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} f(x_\mu) - \int_a^1 f\, dx = af(1) - \frac{1}{N}\int_a^1 \{S_N(l) - N\,|\,l\,|\}\, f'(x)\, dx, \tag{3}$$

справедливое при $a \leqslant a_N$, где $l = [a, x)$.

Заметим, что можно отказаться от дифференцируемости $f(x)$ при $x \neq 0$ и заменить в (2) интеграл на вариацию $V_{a_N}{}^1(f)$.

1.3. Последовательность $p(\mu)$. По определению, если в двоичной системе $\mu = e_m \ldots e_2 e_1$, то (снова в двоичной системе) $p(\mu) = 0, e_1 e_2 \ldots \ldots e_m$.

Лемма 1. *Для последовательности $x_\mu = p(\mu)$ справедливо неравенство* $1/2 < (N+1) a_N < 2$.

Лемма 2. *Любой участок последовательности $x_\mu = p(\mu)$, содержащий 2^ν членов, представляет собой Π_0-сетку.*

Из леммы следует, что $x_\mu = p(\mu)$ при $\mu = 1, 2, \ldots$, есть $Л\Pi_0$-последовательность и поэтому для нее $D_N = O(\ln N)$ (а при $N = 2^\nu$ даже $D_N = O(1)$).

1.4. Простые особенности. Выберем $x_\mu = p(\mu)$. Если $f = x^{-\beta}$, то произведение (2) окажется $O(N^\beta \ln N)$ и условие теоремы 1 будет выполнено при $\beta < 1$.

Если $f = x^{-1} \ln^{-\gamma} x$, то произведение (2) окажется $O(N \ln^{1-\gamma} N)$, и условие теоремы 1 будет выполнено при $\gamma > 1$. В обоих случаях условие справедливости (1) совпадает с условием сходимости интеграла, входящего в (1).

1.5. Функции, не ограниченные при $x \to \xi$. Пусть теперь $f(x) \in U_\xi$, где $0 < \xi < 1$. Введем обозначения

$$a_N^- = \max_{1 \leqslant \mu \leqslant N} (x_\mu \,|\, x_\mu < \xi), \quad a_N^+ = \min_{1 \leqslant \mu \leqslant N} (x_\mu \,|\, x_\mu > \xi).$$

Для любой р.р. последовательности $a_N^- \to \xi$, $a_N^+ \to \xi$, когда $N \to \infty$.

Теорема 1'. *Если последовательность x_μ и функция $f(x)$ из U_ξ удовлетворяют при $N \to \infty$ условию*

$$D_N \left\{ \int_0^{a_N^-} |f'(x)|\, dx + \int_{a_N^+}^{1} |f'(x)|\, dx \right\} = o(N), \tag{4}$$

то справедливо соотношение (1).

К сожалению, если положение особенности $x = \xi$ неизвестно, то вычислять интеграл при помощи (1) рискованно, ибо порядки убывания $\xi - a_N^-$ и $a_N^+ - \xi$ зависят от арифметической природы x_μ и ξ (ср. ([5])). Рассмотрим лишь один частный случай.

1.6. Неизвестная рациональная особенность. Пусть известно только, что ξ — несократимая дробь со знаменателем 2^R. Выберем $x_\mu = p(2^R + \mu - 1)$.

Из леммы 2 следует, что x_μ представляет собой $ЛП_0$-последовательность, так что $D_N = O(\ln N)$. По аналогии с леммой 1 доказывается, что $1/2 < (a_N^+ - \xi)(N + 2^R) < 2$, $1/2 < (\xi - a_N^-)(N + 2^R) < 2$ при $N > 2^R$. После этого нетрудно проверить, что в случае простых особенностей вида $f = |x-\xi|^{-\beta}$ или $f = |x-\xi|^{-1}\ln^{-\gamma}|\xi - x|$ условие (4) выполнено тогда и только тогда, когда существует интеграл, входящий в (1).

1.7. Преобразование особенности. Пусть снова $f(x) \in U_\xi, 0 < \xi < 1$, но положение особенности известно. Преобразуем линейно $[0, \xi)$ в $(0, 1]$ и $(\xi, 1]$ в $(0, 1]$. Складывая интегралы, получим подынтегральную функцию $f_\xi(x) \in U_0$:

$$f_\xi(x) = (1-\xi) f(\xi + x - x\xi) + \xi f(\xi - x\xi).$$

Если характер особенности у этой функции простой (см. выше), то нетрудно доказать, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f_\xi(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} f_\xi(p(\mu)).$$

1.8. Интеграл в смысле главного значения. Пусть $f(x)$ дифференцируема, когда $-1 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 1$, и неограничена при $x \to 0$. Легко доказать, что если характер особенности суммы $f(x) + f(-x)$ при $x = 0$ простой (см. выше), то

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} \{f(p(\mu)) + f(-p(\mu))\}.$$

1.9. Замечания. Все результаты этого параграфа, кроме леммы 2 и п. 1.6, остаются в силе, если вместо $p(\mu)$ использовать любую другую ∂p-последовательность, удовлетворяющую теореме 7 ([2]), гл. 3, стр. 122. С помощью (3) нетрудно оценить порядок сходимости (1).

2. Многомерные задачи.

2.1. Обозначения. Пусть $i' = (i_1, \ldots, i_s)$ — совокупность натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n, \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \tag{5}$$

и пусть $K_{i'}$ — s-мерная грань куба K^n, на которой все координаты, отличные от $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, равны 1 (грань $K_{(1, 2, \ldots, n)}$ — это сам K^n). Проекцию точки $P = (x_1, \ldots, x_n)$ на $K_{i'}$ обозначим через $P_{i'}$ и пусть $dP_{i'} = dx_{i_1} \ldots dx_{i_s}$.

Будем считать, что функция $f(P)$ непрерывна при $0 < x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 < x_n \leqslant 1$ вместе со своими частными производными вида

$$f^{(i')}(P) = \partial^s f(P) \,/\, \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}, \tag{6}$$

где $i_1, \ldots, i_s$ удовлетворяют (5).

Введем отклонение $D_N^{i'}$ проекций точек $P_1, \ldots, P_N$ на грани $K_{i'}$:

$$D_N^{i'} = \sup_{\Pi_{i'}} |S_N^{i'}(\Pi_{i'}) - N|\Pi_{i'}||,$$

где $\Pi_{i'} = \{a_{i_1} \leqslant x_{i_1} < b_{i_1}, \ldots, a_{i_s} \leqslant x_{i_s} < b_{i_s}\}$ — параллелепипед, принадлежащий $K_{i'}$, а $|\Pi_{i'}| = (b_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (b_{i_s} - a_{i_s})$ — его s-мерный объем; $S_N^{i'}(\Pi_{i'})$ — количество точек, проекции которых на $K_{i'}$ принадлежат $\Pi_{i'}$.

Так же, как в п. 1.1, последовательность точек $P_1, \ldots, P_N, \ldots$ р.р. в K тогда и только тогда, когда все $D_N^{i'} = o(N)$ при $N \to \infty$.

2.2. Функции, не ограниченные при $x_1 \ldots x_n \to 0$. Рассмотрим последовательность точек $P_1, \ldots, P_N, \ldots$, расположенных внутри K. Если декартовы координаты точки $P_\mu = (x_{\mu,1}, \ldots, x_{\mu,n})$, то обозначим

$$c_N = \min(x_{\mu,1} \ldots x_{\mu,n}) \quad \text{при } 1 \leqslant \mu \leqslant N. \tag{7}$$

Пусть $G(c)$ — часть куба K^n, в которой $x_1, \ldots, x_n \geqslant c$, а $G_{i'}(c)$ — часть $K_{i'}$, в которой $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s} \geqslant c$. Очевидно, что $P_1, \ldots, P_N$ принадлежат $G(c_N$

Теорема 2. *Предположим, что при любых $i_1, \ldots, i_s$, удовлетворяющих* (5), *сходятся интегралы*

$$\int\limits_{K_{i'}} x_{i_1} \ldots x_{i_s} \,|\, f^{(i')}(P_{i'}) \,|\, dP_{i'} \tag{8}$$

и, когда $N \to \infty$,

$$D_N^{i'} \int\limits_{G_{i'}(c_N)} |\, f^{(i')}(P_{i'}) \,|\, dP_{i'} = o(N). \tag{9}$$

Тогда справедливо соотношение (*).

Заметим, что требование (9) можно несколько ослабить, заменив $G(c_N)$ множеством, на котором выборочная функция распределения точек $P_1, \ldots, P_N$ отлична от нуля.

2.3. Некоторые свойства $ЛП_\tau$-последовательностей. Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — различные моноциклические операторы, порядки которых равны $m_1, \ldots, m_n$, и $p^{(k)}(\mu)$ — др-последовательность, принадлежащая L_k. В [2] доказано, что точки $P_\mu^* = (p^{(1)}(\mu), \ldots, p^{(n)}(\mu))$ и $Q_\mu^* = (p(\mu), p^{(1)}(\mu), \ldots, p^{(n)}(\mu))$ образуют $ЛП_\tau$-последовательности в K^n и соответственно в K^{n+1} со значением $\tau = (m_1 + \ldots + m_n) - n$.

Теорема 3. *Рассмотрим произведение* $c(\mu) = p^{(1)}(\mu) \ldots p^{(n)}(\mu)$. *Если* $1 \leqslant \mu \leqslant 2^\nu$, *то*

$$c(\mu) \geqslant 2^{-\nu-n-\tau}, \quad p(\mu)c(\mu) \geqslant 2^{-\nu-n-1-\tau}.$$

Следствие. *Для последовательностей* P_μ^* *и* Q_μ^* *величины* $1/c_N = O(N)$.

Для любых $ЛП_\tau$-*последовательностей* $D_N^{i'} = O(\ln^s N)$.

2.4. Интегралы со степенной особенностью в нуле. Рассмотрим функцию $f = x_1^{-\beta_1} \ldots x_n^{-\beta_n}$. Интеграл, стоящий в (*), и интегралы (8) сходятся тогда и только тогда, когда все $\beta_k < 1$.

Лемма 3. *Если числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *различные и все* $\alpha_k \neq 1$, *то*

$$\int\limits_{G(c)} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{\Phi(1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c^{1-\alpha_k}}{(\alpha_k - 1)\,\Phi'(\alpha_k)}, \tag{10}$$

где $\Phi(\alpha) = (\alpha - \alpha_1) \ldots (\alpha - \alpha_n)$.

Предположим (для простоты), что $\beta_1, \ldots, \beta_n$ различные. Если $\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_s} \neq 0$, то, полагая в (10) $\alpha_k = 1 + \beta_k$, нетрудно вычислить интеграл, входящий в (9); он равен

$$O\left(c_N^{-\beta_{i_1}} + \ldots + c_N^{-\beta_{i_s}}\right) = O\left(N^{\beta_{i_1}} + \ldots + N^{\beta_{i_s}}\right). \tag{11}$$

Поэтому условие (9) будет выполнено, когда все $\beta_k < 1$ *.

Следовательно, любые сходящиеся интегралы со степенными особенностями рассмотренного вида можно вычислять по формуле (*) с точками P_μ^* и Q_μ^*.

2.5. В заключение автор выражает свою благодарность Н. Ф. Воробьеву и В. П. Федосову (Новосибирск), которые с помощью точек Q_μ^* успешно вычислили ряд несобственных n-мерных интегралов ($2 \leqslant n \leqslant 5$), встретившихся при расчете задач аэродинамики. Под влиянием их работы и было предпринято настоящее исследование.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., 77, № 3, 313 (1916). [2] И. М. Соболь, Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, «Наука», 1969. [3] N. G. de Brujin, K. A. Post, Indagat. Math., 30, 149 (1968). [4] C. Binder, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., II, 179, № 4—7, 233 (1971). [5] P. J. Davis, P. Rabinowitz, J. SIAM, ser. B, Numer. anal., 2, № 3, 367 (1965).

---

* Если некоторые из показателей β_k совпадают, то в (11) появляются множители типа $\ln^{r-1} N$, где r — кратность показателя. Условия (9) будут, по-прежнему, выполнены, если все $\beta_k < 1$.