

Ю. Д. СТРИГИН

ИЕРАРХИЯ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 20 VII 1972)

1. Статья посвящена исследованию и классификации сложности общерекурсивных функционалов. В данном случае оценивается сложность обращения к функции α — аргументу функционала. Рассматриваются специальные трансфинитные последовательности сигнализирующих функционалов как обобщение сигнализирующих функционалов, введенных Трахтенбротом ⁽¹⁾. Эти последовательности связываются с системой O Клини обозначений конструктивных ординалов ⁽²⁾.

Все общерекурсивные функционалы располагаются в иерархию по «длине» соответствующей последовательности. По своим основным свойствам построенная иерархия занимает промежуточное положение между гиперарифметической иерархией ^(3, 4) и иерархией общерекурсивных функций ⁽⁵⁻⁷⁾: с одной стороны, иерархия невырождена, с другой, уже на уровне ω^2 нарушается свойство однозначности.

2. Частично-рекурсивный (ч.р.) функционал $F(\alpha)$ назовем общерекурсивным (о.р.), если он определен на всех одноместных всюду определенных теоретико-числовых функциях α .

По теореме о нормальной форме ⁽⁸⁾, любой ч.р. функционал можно представить в виде

$$F(\alpha) = \psi(\bar{\alpha}(\mu x R(\bar{\alpha}(x)))) ,$$

где ψ и R — о.р. функция и о.р. предикат соответственно.

В соответствии с таким представлением поставим в соответствие ч.р. функционалу F его гёделевский номер $i = c(n, m)^*$, где n — гёделевский номер функции ψ (будем писать ψ_n), m — гёделевский номер предиката R (будем писать R_m). Функционал F с гёделевским номером i будем обозначать F_i .

3. Определение 1 (ср. ⁽¹⁾). Пусть i, j — гёделевские номера о.р. функционалов. Число j назовем просто сигнализирующим для числа i , если для всех α выполняется неравенство

$$\mu x R_{r(i)}(\bar{\alpha}(x)) \leq F_j(\alpha) .$$

Обобщением этого определения является следующее определение, опирающееся на систему O Клини обозначений конструктивных ординалов ⁽²⁾.

Определение 2. Ч.р. функция $\varphi(x)$ называется y -характеристикой для числа i ($y \in O$, i — гёделевский номер о.р. функционала), если φ определена на всех $w \leq_o y$, дает на них гёделевские номера о.р. функционалов так, что

1) $\varphi(0_o) = i$;

2) если $y = z +_o 1_o$, то φ есть z -характеристика для i и $\varphi(z +_o 1_o) =$ просто сигнализирующее для $\varphi(z)$;

3) если $y = 3 \cdot 5^e$, то для всех натуральных t φ есть $\{e\}(t_o)$ -характеристика для i и для каждой α $F_{\varphi(y)}(\alpha) = c(v, n)$, где $v <_o y$, и $\mu x R_{r(\varphi(v))}(\bar{\alpha}(x)) \leq n$.

* $c(n, m)$, $l(k)$, $r(k)$ — функции кодирования пар и обратного декодирования (см. ⁽⁹⁾).

В этом случае число $\varphi(y)$ будем называть y -сигнализирующим для числа i .

φ называется полной y -характеристикой для i , если она является y -характеристикой для i и $F_{\varphi(y)}(\alpha) \equiv \text{const}$.

Построим классы C_y о.р. функционалов ($y \in O$): $F \in C_y \Leftrightarrow$ существует полная $y +_o 1$ -характеристика для некоторого i такого, что $F = F_i$.

Далее определим классы C_v о.р. функционалов (v -конструктивный ординал):

$$C_v = \bigcup_{|y|=v} C_y, \quad y \in O.$$

4. Теорема 1 (о полноте иерархии). *Существует примитивно-рекурсивная функция $h(i)$ такая, что если i — гёделевский номер о.р. функционала, то $h(i) = c(y, n)$, где $y \in O$, n — гёделевский номер полной y -характеристики для i .*

Указанное в теореме 1 y строится с помощью конструкции Клини⁽²⁾ как обозначение брауэровского ординала, соответствующего запирающему предикату $R_{r(i)}$ ⁽¹⁰⁾.

Таким образом, брауэровский ординал запирающего предиката $R_{r(i)}$ может служить верхней оценкой сложности о.р. функционала F_i в данной иерархии.

Следующая теорема устанавливает обратную зависимость.

Будем через $|S^R|$ обозначать брауэровский ординал запирающего предиката R .

Теорема 2. *Если существует полная $y +_o 1$ -характеристика для i , то $|S^{R_{r(i)}}| \leq (\omega^y)^{|y|+1}$.*

Теорема 3 (о невырожденности иерархии). *Существует примитивно-рекурсивная функция $g(y)$ такая, что если $y \in O$, то $g(y)$ — гёделевский номер о.р. функционала такого, что $F_{g(y)} \in C_y$, но для любого $v < |y|$ $F_{g(y)} \notin C_v$.*

5. Пусть v — конструктивный ординал. Скажем, что для v выполняется свойство однозначности, если для любых двух $y_1, y_2 \in O$ таких, что $|y_1| = |y_2| = v$, справедливо равенство $C_{y_1} = C_{y_2}$.

Нетрудно показать, что свойство однозначности выполняется для всех $v < \omega^2$ (ср. (6)).

Теорема 4 (о неоднозначности). *Можно указать три числа y_1, y_2, i ($y_1, y_2 \in O$, i — гёделевский номер о.р. функционала) такие, что $|y_1| = |y_2| = \omega^2$, $F_i \in C_{y_1}$, но $F_i \notin C_{y_2}$.*

Замечание. Указанное y_2 принадлежит стандартному пути до ω^2 в O . Пусть y_3 — обозначение ω^3 на этом пути. О.р. функционал F_i , который имеется в виду в теореме 4, принадлежит C_{y_3} , но для всех $y <_o y_3$ $F_i \notin C_y$.

Доказательство теоремы 4 опирается на лемму о «быстром» пути.

Определение 3. Пусть y_1 и y_2 — обозначения предельного ординала v , $y_1, y_2 \in O$ (y_1 и y_2 можно считать также обозначениями соответствующих путей до v в O). Скажем, что y_1 быстрее y_2 ($y_1 > y_2$), если для любых рекурсивных монотонно возрастающих в смысле $<_o$ последовательностей $f_1(t_n)$ и $f_2(t_n)$, пробегающих через соответствующие y_1 и y_2 пути в O так, что $|f_1(t_n)| \rightarrow v$ и $|f_2(t_n)| \rightarrow v$, найдется число N такое, что для всех $n > N$ $|f_1(n_n)| > |f_2(n_n)|$.

Лемма (о быстром пути). *Существует примитивно-рекурсивная функция $h(y)$ такая, что если $y \in O$ и $|y| = \omega^2$, то $h(y) \in O$, $|h(y)| = \omega^2$ и $h(y) > y$.*

6. Соединением двух функций α и β будем называть функцию

$$\langle \alpha, \beta \rangle (x) = \begin{cases} \alpha(k), & x = 2k, \\ \beta(k), & x = 2k + 1. \end{cases}$$

Определение 4. О.р. функционал $U(\alpha)$ будем называть универсальным для класса K одноместных о.р. функционалов, если для каждого функционала $F \in K$ найдется о.р. функция f такая, что $F(\alpha) \equiv U(\langle f, \alpha \rangle)$, и, наоборот, для любой фиксированной о.р. функции f о.р. функционал $\lambda \alpha U(\langle f, \alpha \rangle) \in K$.

Введем обозначение:

$$K_y = \bigcup_{z <_O y} C_z.$$

Теорема 5. Существует примитивно-рекурсивная функция $g(y)$ такая, что, если $y \in O$, то $g(y)$ — гёделевский номер о.р. функционала $F_{g(y)}$ универсального для класса K_y , при этом $F_{g(y)} \in C_{z+_O(2n)_O}$, где z и n соответствуют разложению: $y = z +_O n_O$ (z — обозначение предельного ординала).

Замечание. Рассматриваемая иерархия о.р. функционалов была построена непредикативно. Построение универсальных функционалов $F_{g(y)}$ для классов K_y , о котором говорится в теореме 5, осуществляется на самом деле таким образом (индуктивно по системе O), что можно говорить о предикативном построении иерархии.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Мучнику за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. А. Трахтенброт, Уч. зап. Пензенск. гос. пед. инст., 4, 75 (1956). ² S. C. Kleene, Am. J. Math., 77, № 3, 405 (1955). ³ S. C. Kleene, Bull. Am. Math. Soc. 61, № 3, 193 (1955). ⁴ C. Spector, J. Symb. Log., 20, № 2, 151 (1955). ⁵ S. C. Kleene, Coll. Math., 6, № 1, 67 (1958). ⁶ P. Axt, Trans. Am. Math. Soc., 92, 85 (1959). ⁷ С. Фефферман, Сборн. пер. Математика, 15, 6 (1974). ⁸ С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1954, стр. 259. ⁹ А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. ¹⁰ L. E. J. Brouwer, Proc. Sect. Sci., 27 (1924).