Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 2

УДК 519.41/.47

МАТЕМАТИКА

П. П. БАРЫШОВЕЦ

КОНЕЧНЫЕ НЕАБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ ДОПОЛНЯЕМЫ КОММУТАНТЫ ВСЕХ СОБСТВЕННЫХ ПОДГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 5 VI 1972)

В работе С. Н. Черникова [1] поставлена общая проблема изучения строения групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп. Самым простым классом групп с заданной системой дополняемых подгрупп является класс вполне факторизуемых групп, т. е. групп, в которых дополняемы все подгруппы. Конечные вполне факторизуемые группы изучались Ф. Холлом [2], произвольные (как конечные, так и бесконечные) группы такого рода — Н. В. Черниковой [3], получившей их полное описание. Основной из полученных ею результатов формулируется в виде следующей теоремы.

Нетривиальная группа G тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она разлагается в полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ двух своих вполне факторизуемых абелевых подгрупп A и B, из которых первая является прямым произведением инвариантных в G циклических групп простых порядков.

У вполне факторизуемых групп система дополняемых подгрупп состоит из всех подгрупп. Сужая эту систему, можно получать различные классы групп, охватывающие класс вполне факторизуемых групп. На этом пути получаются группы, сохраняющие те или иные особенности строения вполне факторизуемых групп. В настоящей статье дается описание строения конечных неабелевых групп, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп. Задача изучения таких групп была предложена автору С. Н. Черниковым.

В настоящей статье отмечается, что конечные неабелевы нильпотентные группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп, исчерпываются нильпотентными группами Миллера — Морено (так обычно называют конечные неабелевы группы, все подгруппы которых абелевы, см., например, [4]). Произвольные (как конечные, так и бесконечные) нильпотентные группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп краткости ради будем называть DSC-группами, или группами со свойством DSC. Из результатов настоящей работы вытекает, что конечная DSC-группа G разлагается в полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ двух таких своих абелевых подгрупп A и B, первая из которых (коммутант группы G) вполне факторизуема и является прямым произведением минимальных инвариантных подгрупп группы G, порядки которых вполне определяются соответствующими простыми делителями порядка множителя B. Из сопоставления этого результата с приведенной выше теоремой Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах непосредственно усматривается, что в строении конечных DSC-групп сохраняются основные черты строения конечных ненильпотентных вполне факторизуемых групп. В то же время изученный класс групп существенно шире класса конечных ненильпотентных вполне факторизуемых групп, так как в нем содержатся, например, все ненильпотентные группы Миллера — Морено и даже все прямые произведения групп такого рода (в последнем можно убедиться с помощью леммы 1 настоящей статьи). Из сопоставления рассматриваемых результатов вытекает также, что конечная DSC-группа тогда и только тогда будет вполне факторизуемой группой, когда у нее все силовские подгруппы элементарные абелевы, а любой минимальный нормальный делитель имеет простой порядок.

Автор выражает глубокую благодарность С. Н. Черникову за предложенную тему и руководство при ее разработке.

1. Описание конечных неабелевых нильпотентных групп, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп, дает следующее предложение.

Теорема 1. *Коммутанты всех собственных подгрупп конечной неабелевой нильпотентной группы дополняемы в ней тогда и только тогда, когда она является нильпотентной группой Миллера — Морено.*

2. Приведенные в этом пункте результаты относятся в основном к конечным DSC-группам с абелевым коммутантом. При их доказательстве используются следующие установленные автором свойства произвольных конечных DSC-групп:

1) разрешимость;

2) абелевость силовских подгрупп;

3) наследственность свойства DSC для неабелевых подгрупп;

4) элементарная абелевость силовских подгрупп коммутанта.

Укажем также некоторые другие вспомогательные утверждения, которые используются при получении последующих результатов предлагаемой статьи (теоремы 2 и 3).

Лемма 1. *Пусть A — абелев нормальный делитель группы G, дополняемый в G.*

Тогда, для того чтобы подгруппа $A_1 \subset A$ была дополняема в группе G, необходимо и достаточно, чтобы она имела в группе A дополнение, инвариантное в группе G.

Лемма 2. *Пусть G — конечная DSC-группа порядка $p^\alpha n$, $(n, p) = 1$, и ее коммутант G' имеет порядок p^α. Если существует такое натуральное число a, что при любом $q \mid n$ показатель числа p по модулю q равен a, то*

$$G' = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s,$$

где подгруппы $K_1, K_2, \ldots, K_s$ имеют порядок p^a и инвариантны в группе G.

Определение 1 ([5]). Конечная разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами называется A-группой.

Лемма 3. *Коммутант произвольной A-группы дополняем в ней. Если коммутант G' A-группы G абелев, то любые два его дополнения в группе G сопряжены в G.*

Доказательство этой леммы нетрудно получить с помощью результатов работы ([6]).

Дадим далее два определения.

Определение 2. Пусть K — некоторая подгруппа конечной группы G и M — произвольная нетривиальная абелева подгруппа той же группы. Если M не содержится в централизаторе подгруппы K, то произведение всех тех и только тех силовских подгрупп Q группы M, для которых $[K, Q] = 1$, будем называть $\omega(K)$-подгруппой группы M (здесь $[K, Q]$ — взаимный коммутант подгрупп K и Q группы G).

Определение 3. Разложение конечной абелевой группы B, порядок которой не делится на простое число p, в прямое произведение таких холловских подгрупп B_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, что для каждого простого q, делящего число $|B_i|$, $i = 1, 2, \ldots, k$, показатель числа p по модулю q равен одному и тому же числу a_i, зависящему от i, причем $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, называется $X(p)$-разложением группы B (здесь $|B_i|$ — порядок группы B_i).

Нетрудно убедиться, что для каждого простого числа p, не делящего порядок нетривиальной конечной абелевой группы B, последняя имеет и притом единственное (с точностью до нумерации множителей) $X(p)$-разложение.

Лемма 4. *Пусть G — неабелева A-группа с абелевым коммутантом G', P — силовская p-подгруппа коммутанта G' по какому-нибудь простому числу p, делящему порядок последнего и M — дополнение подгруппы G' в G (см. лемму 3).*

Тогда (абелева) группа M обладает (единственной) $\omega(P)$-подгруппой, причем последняя имеет $X(p)$-разложение.

Сформулируем теперь теорему, описывающую строение конечных DSC-групп с абелевым коммутантом.

Теорема 2. *Каждая конечная DSC-группа является A-группой. Неабелева A-группа G с абелевым коммутантом G' тогда и только тогда будет DSC-группой, когда силовская p-подгруппа P ее коммутанта G' по произвольному p, делящему порядок последнего, обладает следующими свойствами:*

1) является элементарной абелевой;

2) разлагается в прямое произведение таких инвариантных в G подгрупп P_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, что если M — абелева группа, дополняющая подгруппу G' в группе G (ее существование вытекает из леммы 3), B — $\omega(P)$-подгруппа группы M и $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_l$ — $X(p)$-разложение подгруппы B (см. лемму 4), то $k = l$ и подгруппы B_i можно занумеровать таким образом, что при $i, j = 1, 2, \ldots, k$ $[P_i \cdot B_j] = P_i$, если $i = j$, и $[P_i \cdot B_j] = 1$, если $i \neq j$;

3) для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ имеет место такое разложение $P_i = P_{i1} \times P_{i2} \times \ldots \times P_{is_i}$ с инвариантными в G множителями, что $|P_{ij}| = p^{a_i}$ $(j = 1, 2, \ldots, s_i)$, где a_i — показатель числа p по модулю q, и $q \,/\, |B_i|$.

Следствие. *Пусть G — конечная DSC-группа с абелевым коммутантом. Подгруппы P_{ij} (см. условие теоремы 2) являются тогда минимальными нормальными делителями группы G и содержат в своих централизаторах все силовские r-подгруппы группы G по таким числам r, что показатель числа p по модулю q отличен от a, где $p^a = |P_{ij}|$.*

3. С помощью следствия теоремы 2 и результатов, относящихся к примитивным разрешимым линейным группам ([7]), доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Коммутант произвольной конечной DSC-группы абелев.*

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
17 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сборн., 35, 93 (1954). [2] Ph. Hall, J. London Math. Soc., 12, 201 (1937). [3] Н. В. Черникова, Матем. сборн., 39, 273 (1956). [4] L. Redei, Comment. Math. Helv., 20, 225 (1947). [5] Ph. Hall, J. reine u. angew. Math., 182, 206 (1940). [6] D. Taunt, Proc. Cambr. Phil. Soc., 45, 24 (1949). [7] Д. А. Супруненко, Разрешимые и нильпотентные линейные группы, Минск, 1958.