

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

В. С. ШЕВЯКОВ

**О ФОРМУЛАХ УЗКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ,
ОТЛИЧАЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ С ПРОСТО
ВЫЧИСЛИМЫМИ ПРЕДИКАТАМИ**

(Представлено академиком П. С. Новиковым 20 VII 1972)

Моделью называется множество с заданными на нем предикатами (см. ⁽¹⁾). Пусть (α) — некоторый класс моделей. Множество всех замкнутых формул узкого исчисления предикатов с равенством (у.и.п.), истинных на классе (α) , называется элементарной теорией этого класса и обозначается Th_α . Истинность формулы у.и.п. на классе означает ее истинность на всех моделях класса той же сигнатуры, что и формула. Слово «элементарная» в дальнейшем опускается. Теориям отдельных классов, состоящих из одной, чем-либо интересной модели, посвящено много работ, обзор которых сделан, например, в ^(2, 3). Теорией класса всех вообще моделей является множество всех доказуемых формул — в этом и заключается теорема Гёделя о полноте у.и.п. Представляет интерес изучение классов, которые определяются некоторыми ограничениями на сложность вычисления предикатов.

Знак $\subset$ означает, в отличие от $\subseteq$, строгое вложение. Если (α) , (β) — классы моделей и $(\beta) \subseteq (\alpha)$, ясно, что $\text{Th}_\alpha \subseteq \text{Th}_\beta$. Если формула Φ выполнима в классе (α) , но не выполнима в классе (β) , то $\neg \Phi \in \text{Th}_\beta \setminus \text{Th}_\alpha$ и $\text{Th}_\alpha \subset \text{Th}_\beta$. В настоящей заметке указываются формулы, имеющие модель в большем, но не в меньшем классе для некоторых классов с предикатами из класса Гжегорчика $\mathcal{E}^2$ ⁽⁴⁾.

Дадим определение рассматриваемых классов моделей.

1) $(\mathcal{E}^2)$ — класс всех моделей, у которых основное множество $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, а предикаты принадлежат классу $\mathcal{E}^2$.

2) Класс автоматных моделей $(\mathcal{A})$. Пусть Σ — конечный алфавит, $\sigma \notin \Sigma^*$. Для всякого набора слов $x_1, \dots, x_n$ из Σ^* числа $i_1, \dots, i_n$ таковы, что $x_1\sigma^{i_1}, \dots, x_n\sigma^{i_n}$ имеют одинаковую длину (σ^i — это $\underbrace{\sigma\sigma\dots\sigma}_{i \text{ раз}}$).

n -Местный предикат P (над словами из Σ^*) называется автоматным, если существует такой конечный автомат над $\Sigma \cup \{\sigma\}$ с n лентами, на которых он работает синхронно, что $P(x_1, \dots, x_n)$ истинно тогда и только тогда, когда набор $\langle x_1\sigma^{i_1}, \dots, x_n\sigma^{i_n} \rangle$ допускается этим автоматом ⁽⁵⁾.

3) Модель называется 1-мерной пресбургеровой, если ее основное множество N , а предикаты выразимы средствами у.и.п. через предикат обычного сложения $x + y = z$ (см. ⁽³⁾, § 2; ⁽⁶⁾, § 5.6). Предикат $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ называется n -мерным пресбургеровым, если $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k \in N^n$ и существует 1-мерный kn -местный пресбургеров предикат P' , такой, что $P'(x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{kn}) = P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ (x_{ij} — j -я координата вектора $\bar{x}_i$). Мы будем рассматривать класс всех пресбургеровых моделей (Pr) и классы n -мерных моделей (Pr, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$

4) Если в определении пресбургеровых моделей заменить предикат $x + y = z$ на $x \leq y$ (обычный порядок), получим классы $(\leq)$ и $(\leq, n)$.

Из приводимых ниже теорем 1—3 и замечания к теореме 2 следует

$$\text{Th}_{\leq 2} \subset \text{Th}_{\leq 1} \subset \text{Th}_{\text{Pr}} \subset \text{Th}_{\leq}, \quad \text{Th}_{\text{Pr}, n} \subset \text{Th}_{\text{Pr}, n-1},$$

$$\text{Th}_{\leq, n} \subset \text{Th}_{\leq, n-1}, \quad \text{Th}_{\text{Pr}, n} \subset \text{Th}_{\leq, n}, \quad n \geq 1.$$

Теорема 4. Формула

$$\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z). \quad \forall x \forall y \forall z \forall t \forall u (Q(x, y, z) Q(t, u, z) \supset: x = t. \quad y = u)$$

не выполнима в автоматной модели.

Эта формула описывает нумерацию (возможно, неоднозначную) пар с однозначным восстановлением пары по номеру; такие предикаты есть в $\mathcal{E}^2$ ⁽⁴⁾.

Пусть $\bar{c}, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_r \in \mathbb{N}^n$. Множество $L \subseteq \mathbb{N}^n$ называется линейным с предпериодом $\bar{c}$ и системой периодов $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_r$, если $L = \{\bar{x} \mid \bar{x} = \bar{c} + \alpha_1 \bar{p}_1 + \dots + \alpha_r \bar{p}_r, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}\}$.

Подмножество множества $\mathbb{N}^n$ называется полulinейным, если оно является объединением конечного числа линейных множеств. Все полulinейные множества и только они являются графиками пресбургеровых предикатов (см. ⁽⁶⁾, § 5.6). Рангом линейного множества назовем ранг его системы периодов (в смысле обычной линейной зависимости). Конечная система линейных множеств $T = \{L_i\}$ называется покрытием $A \subseteq \mathbb{N}^n$, если $A \subseteq \bigcup_i L_i$. Назовем рангом T максимум рангов L_i . Раз-

мерностью A естественно считать минимум рангов покрытий A .

Лемма 1. Пусть Q — бинарный пресбургеров предикат и на n -мерном множестве A он задает полный порядок. Тогда порядковый тип A меньше ω^{n+1} .

Доказательство леммы осуществляется индукцией по n и использует свойство «периодичности» линейных множеств.

Сужение пресбургеровой модели на произвольное n -мерное множество назовем n -мерной обобщенной пресбургеровой моделью. С помощью сформулированной леммы доказывается

Теорема 2. Пусть Φ_0 — конъюнкция аксиом порядка Q . Формула

$$\begin{aligned} \Phi_0. \exists x \exists y (Q(x, y). x \neq y). \forall x \forall y (Q(x, y). x \neq \\ \neq y \supset: \exists z (Q(x, z) Q(z, y). x \neq z. y \neq z)), \end{aligned}$$

означающая, что Q есть предикат плотного порядка, выполнима в автоматной, но не выполнима в обобщенных пресбургеровых моделях.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что: 1) если бинарный предикат из класса $(\leq, n)$ вполне упорядочивает $A \subseteq \mathbb{N}^n$, то порядковый тип A меньше $\omega^n \cdot 2$; 2) оценка леммы 1 точная, т. е. $\mathbb{N}^n$ можно упорядочить с помощью пресбургерового предиката по любому типу $\xi < \omega^{n+1}$; 3) существуют замкнутые формулы у.и.п. $\Phi_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, содержащие единственную бинарную предикатную букву Q , и такие, что в любой модели, где $\Phi_{n,m}$ истинна, Q — предикат порядка, который некоторое подмножество упорядочивает по типу $\omega^n \cdot m$. Поэтому $\Phi_{n,1}$ выполнима в $(\leq, n)$, но не выполнима в $(\text{Pr}, n-1)$, а $\Phi_{n,2}$ выполнима в (Pr, n) , но не в $(\leq, n)$, $n \geq 1$.

Векторы системы периодов линейного множества, записанные по столбцам, образуют матрицу периодов этого множества. Геометрическим описанием предикатов, выражимых через порядок, является

Лемма 2. График предиката из $(\leq, 1)$ представим в виде конечного объединения множеств, матрица периодов любого из которых состоит из нулей и единиц и обладает тем свойством, что если строки $\bar{p}_{j_1}, \dots, \bar{p}_{j_s}$ линейно зависимы и первые $s-1$ из них линейно независимы, то $\bar{p}_{j_s} = 0$ или $\bar{p}_{j_s} = \bar{p}_{j_i}$ для $i < s$.

Используя эту лемму, доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. Формула

$$\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z). \forall x \forall y \forall z \forall t (Q(x, y, z) Q(x, t, z) \supset y = \\ = t: Q(x, y, z) Q(t, y, z) \supset x = t),$$

выполнимая в $(Pr, 1)$ при $Q(x, y, z) \equiv x + y = z$, не выполняется в $(\leq)$.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Мучвику и А. Л. Семепову за ценную помощь.

Институт точной механики и вычислительной техники
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М., 1970. ² А. И. Мальцев, Тр. Междунаро. конгресса математиков, Москва, 1966. М., 1968, стр. 217. ³ Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров и др., УМН, **20**, № 4, 37 (1965). ⁴ А. Гжегорчик, В сборн. Проблемы математической логики, М., 1971, стр. 9. ⁵ С. С. Elgot, J. E. Mezei, IBM J. Res. and Development, **9**, 1, 47 (1965). ⁶ С. Гинзбург, Математическая теория контекстно-свободных языков, М., 1970. ⁷ Б. А. Трахтеброт, ДАН, **88**, № 6, стр. 953 (1953).