Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

УДК 531.395 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Б. А. РЯБОВ, Г. П. САЧКОВ

НАКОПЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИНВАРИАНТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 14 VIII 1972)

Постоянные параметры инвариантных динамических систем на практике обычно претерпевают в определенных допусках изменения относительно номинальных значений. При этом условия абсолютной инвариантности [1] нарушаются и реализуются ε-инвариантные системы, близость которых к абсолютно инвариантным системам оценивается максимальным ограниченным накопленным отклонением. Определяются границы допустимых изменений параметров.

Исследуется динамическая голономная система с n степенями свободы, где q_k и $\dot{q}_k$, $k=1, 2, \ldots, n$,— соответственно обобщенные координаты и скорости. В случае стационарности кинетическая энергия T системы представляется в виде однородной функции второй степени от обобщенных скоростей [2]: $T={}^1/_2\dot{q}^\tau A\dot{q}$, где $\dot{q}$ — столбец размера $(n\times 1)$, знак τ означает транспонирование, симметричная матрица $A=\|a_{ij}\|_1^n$.

Так как минимальное число независимых координат системы равно числу степеней свободы n, то, за исключением отдельных точек, определитель $|A|\neq 0$. С учетом невырожденности из неравенства $T\geqslant 0$ следует положительная определенность T, т. е. $A>0$.

Пусть непотенциальные обобщенные силы динамической системы линейно и однородно зависят от обобщенных скоростей $\dot{q}$, тогда такие обобщенные силы можно представить в виде суммы диссипативных и гироскопических сил. Положим, что потенциальная энергия системы является квадратичной формой координат q и образована постоянной симметричной матрицей $K>0$ размера $(n\times n)$, у которой все собственные значения положительны. Тогда, в силу теоремы Кельвина — Четаева, динамическая система асимптотически устойчива, а ее дифференциальные уравнения, получаемые из уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид [3]

$$A\ddot{q}+(D+G)\dot{q}+Kq=f(t), \tag{1}$$

где A, D, G, K — постоянные матрицы размера $(n\times n)$, матрица $D>0$ симметричная, матрица G антисимметричная; $f(t)$ — ограниченный по модулю столбец внешних возмущений размера $(n\times 1)$. Для общности отметим, что дальнейшее изложение справедливо для асимптотически устойчивых динамических систем вида (1) без требования симметричности матриц A, D, K.

Предположим, что обобщенная координата q_j, $1\leqslant j\leqslant n$, абсолютно инвариантна к внешнему возмущению $f_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant n$, а остальные возмущения $f_k(t)$, $k\neq i$; $k=1, 2, \ldots, n$, равны нулю [1]. Опуская индексы, запишем дифференциальное уравнение выбранной обобщенной координаты, используя, например, метод исключения. Тогда получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$q^{(m)}+a_{m-1}q^{(m-1)}+\ldots+a_1\dot{q}+a_0q=0, \tag{2}$$

для которого характеристический многочлен гурвицев. Пусть постоянные параметры инвариантной динамической системы претерпевают некоторые ограниченные изменения $b_k(t)$, $k=0,1,\ldots,n$, относительно номинальных значений. В этом случае ([4]) максимальное накопленное отклонение, вызванное внешним возмущением, ограничено, если изменения параметров достаточно малы. Определим допустимые границы изменения параметров, обеспечивающие ограниченность накопленного отклонения, для уравнения (2), принимающего вид

$$q^{(m)}+\sum_{k=0}^{m-1}[a_k+b_k(t)]\,q^{(k)}=0,$$

решение которого

$$q(t)=Q(t)+\int_0^t \eta(t-\tau)\cdot\psi(\tau)\,d\tau,$$

где $Q(t)$ — общий интеграл уравнения (2), $\eta(t-\tau)$ — функция Грина, зависящая от разности аргументов, $\psi(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k(\tau)\,q^{(k)}(\tau)$, константа $b\geqslant|b_k(t)|$, $k=0,1,\ldots,m-1$; $t\in[0,\infty)$.

Для простоты рассмотрим случай апериодической устойчивости уравнения (2), в котором начальные условия $q_0^{(k)}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, ограничены по модулю константой d, а функция Грина удовлетворяет неравенству $|\eta^{(\nu)}(t)|\leqslant c\exp(-\lambda t)$, $\nu=0,1,\ldots,m-1$, где c — положительная константа, зависящая только от a_k, $k=0,1,\ldots,m-1$, λ — степень устойчивости. Как следует из дальнейшего вывода, приводимые ниже оценки сохраняют силу для произвольного расположения корней гурвицева характеристического многочлена. На основании принятых предположений запишем соотношения

$$g^{(\nu)}(t)-|Q^{(\nu)}(t)|\leqslant|q^{(\nu)}(t)|\leqslant g^{(\nu)}(t)+|Q^{(\nu)}(t)|,\quad \nu=0,1,\ldots,m-1,$$

суммируя которые, получим

$$u_-(t)\leqslant u(t)\leqslant u_+(t),\qquad (3)$$

где

$$g^{(\nu)}(t)=\int_0^t|\eta^{(\nu)}(t-\tau)|\cdot\psi(\tau)\,d\tau,\qquad u(t)=\sum_{\nu=0}^{m-1}|q^{(\nu)}(t)|,$$

$$u_+(t)=\left[mcb\int_0^t u(\tau)\exp(\lambda\tau)\,d\tau+dR\right]\exp(-\lambda t),$$

$$u_-(t)=\left[mcb\int_0^t u(\tau)\exp(\lambda\tau)\,d\tau-dR\right]\exp(-\lambda t),$$

R — положительная константа, зависящая от a_k, $k=0,1,\ldots,m-1$.

Допустимую границу b изменения параметров определим сравнением характеристических показателей неравенства (3). Пусть $\chi[u]$ — характеристический показатель функции $u(t)$, тогда, в силу свойства монотонности характеристического показателя и $\chi[u_-(t)]=\chi[u_+(t)]$, имеем $\chi[u]=\chi[u_+]$. Ограничившись правой частью неравенства (3), запишем его в виде дифференциального неравенства

$$\dot z-\alpha-\beta z\leqslant 0,\qquad (4)$$

где

$$z(t)=\int_0^t u(\tau)\exp(\lambda\tau)\,d\tau,\quad z(0)=0,\quad \alpha=dR,\quad \beta=mcb.$$

Как показано в ([5]), теорема С. А. Чаплыгина ([6]) о дифференциальных неравенствах для уравнений первого порядка имеет абсолютную применимость и в рассматриваемом случае (4) радиус применимости этой теоремы равен бесконечности. Поэтому при всех $t\in[0,\infty)$ на основании теоремы С. А. Чаплыгина справедливо неравенство

$$z(t) \leqslant y(t) = \frac{\alpha}{\beta}[\exp(\beta t) - 1], \tag{5}$$

где $y(t)$ является решением уравнения $\dot{y} - \alpha - \beta y = 0$ с нулевыми начальными условиями. Из приведенных рассуждений, в частности, следует, что часто применяемая лемма Гронуолла — Беллмана ([7,8]) является следствием теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Действительно, пусть функция $x(t) = \ln(C_* + \int_0^t v\cdot W dt)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству: $\dot{x} - v \leqslant 0$ $(W \leqslant C_* + \int_0^t v\cdot W dt)$, где константа $C_* > 0$, функции $v(t) \geqslant 0$, $W(t) \geqslant 0$, $t \in (0, \infty)$. Тогда функция $\varphi(t) = \ln C_* \exp(\int_0^t v\, dt)$, являющаяся решением уравнения $\dot{\varphi} - v = 0$, $\varphi(0) = \ln C_*$ удовлетворяет по теореме С. А. Чаплыгина неравенству $\varphi \geqslant x$, которое с учетом $W \leqslant C_* + \int_0^t v\cdot W\, dt$ дает результат леммы Гронуолла — Беллмана: $W \leqslant C_* \exp\int_0^t v\, dt)$.

Сравнивая характеристические показатели неравенства (3) и (5), приходим к выводу, что для экспоненциального стремления к нулю при $t \to \infty$ функций $u(t)$ и $g(t)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $\lambda > \beta$. Таким образом, при произвольном законе изменения $b_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, допустимая граница b изменения параметров определяется неравенством $b < \lambda / (mc)$.

Покажем возможность обобщения полученного результата для класса нестационарных систем. В этом случае матрицы A, D, G, K в уравнении (1) являются переменными. Аналогично (2) выделенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами $d_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t \in [0, \infty)$ предполагается асимптотически устойчивым. Пусть $d_k(t)$ представимы в виде суммы двух ограниченных составляющих: постоянной a_k и переменной $\alpha_k(t)$: $d_k(t) = a_k + \alpha_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, где выбор a_k произведен способом, обеспечивающим максимальную степень устойчивости λ для асимптотически устойчивого уравнения (2). Тогда ограниченные изменения $\beta_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, параметров динамической системы приводят к дифференциальному уравнению

$$q^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1}[d_k(t) + \beta_k(t)]\, q^{(k)} = 0,$$

которое заменой $\alpha_k(t) + \beta_k(t) = b_k(t)$ сводится к исследованному выше случаю.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
8 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Петров, А. И. Кухтенко, Сборн. Теория инвариантности в системах автоматического управления, «Наука», 1964. [2] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, 1960. [3] Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, «Наука», 1965. [4] Б. А. Рябов, Г. П. Сачков, Тр. IV Всесоюзн. совещ. по теории инвариантности и теории чувствительности автоматических систем, ч. 3, Киев, 1971. [5] Б. Н. Петров, ДАН, 51, № 4 (1946). [6] С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950; Тр. Центр. аэрогидродинамич. инст., в. 130 (1932). [7] Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений, М., 1964. [8] Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.