Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

В. А. СКЛЯРЕНКО

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАНЖУА СУММАХ ВСЮДУ СХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VII 1972)

Известно (см. ([1])), что обобщенные интегралы, позволяющие рассматривать всякий всюду сходящийся к конечной сумме тригонометрический ряд как ряд Фурье своей суммы, противоречат интегралу Данжуа — Хинчина (о Д — Х-интеграле см. ([2])).

В настоящей статье показывается, что противоречие может быть реализовано на классе функций, являющихся суммами всюду сходящихся тригонометрических рядов. Для этого строится пример тригонометрического ряда, всюду сходящегося к конечной Д — Х-интегрируемой функции $f(x)$, но не являющегося рядом Фурье — Данжуа этой функции. Поскольку коэффициенты этого ряда являются коэффициентами Фурье в смысле упомянутых тригонометрических интегралов, то отсюда следует искомое противоречие.

В статье применяются методы, введенные Данжуа при построении примера тригонометрического ряда, требующего для вычисления коэффициентов использования всех операций тотализации T_{2S} (см. ([3]), стр. 528—563).

Сформулируем в виде лемм некоторые результаты из ([3]).

Рассмотрим последовательность всюду сходящихся на множестве E рядов

$$[w_p(\theta)]\qquad f_p(\theta)=u_{p1}(\theta)+u_{p2}(\theta)+\ldots+u_{pn}(\theta)+\ldots,\qquad p=0,\ 1,\ \ldots,$$

и последовательность мажорант их частных сумм

$$\mu_p(\theta)=\mu(w_p,\theta)=\sup_n\Big|\sum_{k=1}^{n}u_{pk}(\theta)\Big|,\qquad p=0,1,\ldots$$

В этих обозначениях имеет место

Лемма А (см. ([3]), стр. 488). *Пусть существуют числовая последовательность* $\{\varepsilon_p\}_{p=0}^{\infty}$, $\varepsilon_p>0$, $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\varepsilon_p<\infty$, *и система множеств* $e_p\subset E$, $p=0,\ 1,\ \ldots$, *такие, что всякая точка из E принадлежит лишь конечному числу множеств e_p; для каждой точки θ из E, $\theta\notin e_p$, выполнено неравенство* $\mu(w_p,\theta)<\varepsilon_p$.

При этих условиях для каждой точки θ из E

1) *ряд $\sum f_p(\theta)$ сходится абсолютно; обозначим его сумму $f(\theta)$;*

2) *всякий ряд $u_{1n}(\theta)+u_{2n}(\theta)+\ldots+u_{pn}(\theta)+\ldots$ абсолютно сходится; обозначим его сумму $u_n(\theta)$;*

3) *ряд*

$$[w(\theta)]\qquad u_1(\theta)+u_2(\theta)+\ldots+u_n(\theta)+\ldots$$

сходится и имеет своей суммой $f(\theta)$.

Вторая лемма описывает свойства тригонометрического ряда, всюду сходящегося к некоторой функции.

Лемма Б (см. ([3]), стр. 532). *Пусть d — положительное число, меньшее π, и числа α, β, d', $d'<\alpha<\beta<d$, таковы, что*

$$\alpha=\frac{d}{4}e^{-\varepsilon/d},\quad \beta=\alpha e^{\varepsilon^2/d},\quad d'=\frac{\alpha^2}{4},\quad 0<\varepsilon<1.$$

Нечетная функция $h(x, d)$, имеющая период 2π, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$h(x, d) = \begin{cases} d/x & \text{при} \quad \alpha < |x| < \beta, \\ & \text{при} \quad |x| < \alpha \quad \text{и} \quad \beta < |x| \leqslant \pi, \\ d/(2x) & \text{при} \quad |x| = \alpha \quad \text{и} \quad |x| = \beta, \end{cases}$$

представима в виде суммы всюду сходящегося к ней тригонометрического ряда σh с равным нулю нулевым коэффициентом и обладает следующими свойствами:

1) $\int\limits_0^\pi h(t, d)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta h(t, d)\, dt = \varepsilon^2$,

2) $\mu(\sigma h, x) < C_1 \frac{d}{|x|}$ *при* $d \leqslant |x| \leqslant \pi$,

3) $\mu(\sigma h, x) < C_2 \frac{|x|}{d'}$ *при* $|x| \leqslant d'$,

где C_1 и C_2 — абсолютные константы.

Докажем основной результат статьи.

Теорема. *Существует тригонометрический ряд* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, *всюду сходящийся к $Д - X$-интегрируемой функции $f(x)$, при этом $a_0 = 0$, а* $(Д - X) \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \neq 0$.

Докажем теорему путем построения примера.

Пусть задан отрезок $r = [a, b] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и две последовательности a_n, b_n, $n \geqslant 0$, такие, что

$$a_n \neq 0, \quad a_0 \leqslant 1, \quad a_n \searrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \tag{*}$$

$$\left(b_n \neq 0, \quad b_0 \leqslant 1, \quad b_n \searrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty\right).$$

Построим последовательности чисел d_n, α_n, β_n, d_n', $n \geqslant 0$, такие, что

$$d_0 = \frac{b-a}{8}, \quad \alpha_n = \frac{d_n}{4} e^{-\varepsilon, d_n}, \quad \beta_n = \alpha_n e^{\varepsilon^2, d_n}, \quad d_n' = \frac{\alpha_n^2}{4}, \quad d_{n+1} = \frac{d_n'}{2}.$$

Легко видеть, что $d_{n+1} < d_n' < \alpha_n < \beta_n < d_n$.

Выведем некоторые свойства функции $k(x, r) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h\left(x - \frac{7a+b}{8}, d_n\right) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n h\left(x - \frac{a+7b}{8}, d_n\right)$, где $h(x, d)$ — функция из леммы Б.

Для последовательности функций $f_n(x)$

$$f_{2k}(x) = a_k h\left(x - \frac{7a+b}{8}, d_k\right), \quad f_{2k+1}(x) = -b_k h\left(x - \frac{a+7b}{8}, d_k\right)$$

и тригонометрических рядов, к ним сходящихся, выполнены условия леммы А, где $E = [-\pi, \pi]$,

$$e_{2k} = \left(\frac{7a+b}{8} + d_k', \frac{7a+b}{8} + d_k\right) \cup \left(\frac{7a+b}{8} - d_k, \frac{7a+b}{8} - d_k'\right),$$

$$e_{2k+1} = \left(\frac{a+7b}{8} + d_k', \frac{a+7b}{8} + d_k\right) \cup \left(\frac{a+7b}{8} - d_k, \frac{a+7b}{8} - d_k'\right).$$

(e_n, очевидно, не пересекаются и, следовательно, никакая точка $x \in [-\pi, \pi]$ не может принадлежать более чем одному e_n), $\varepsilon_{2k} = C_3 d_k$, $\varepsilon_{2k+1} = C_3 b_k$, где $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$ — абсолютная константа. Действительно, в силу леммы Б для функции $f_n(x)$ существуют всюду сходящийся к ней тригонометрический ряд σf_n такой, что при $x \notin e_n$ $\mu(\sigma f_n, x) \leqslant \varepsilon$, причем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.

Следовательно, в силу леммы А существует тригонометрический ряд σk, всюду сходящийся к функции $k(x, r)$.

Обозначим через $A(r) \subset r$ множество, состоящее из счетной системы сегментов:

$$A(r) =$$

$$= \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[\frac{7a+b}{8} + d_{n+1},\ \frac{7a+b}{8} + d_n'\right]\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a+7b}{8} - d_n',\ \frac{a+7b}{8} - d_{n+1}\right]\right),$$

и проверим, что найдется абсолютная константа C_4 такая, что при $x \in A(r) \cup ([-\pi, \pi] \setminus r)$

$$\mu(\sigma k, x) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu\left(\sigma h\left(t - \frac{7a+b}{8},\ d_k\right),\ x\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mu\left(\sigma h\left(t - \frac{a+7b}{8},\ d_k\right),\ x\right) \leqslant C_4.$$

Оценим только первую сумму при $x \in \left[\frac{7a+b}{8} + d_{n+1},\ \frac{7a+b}{8} + d_n'\right]$, остальные варианты рассматриваются подобным образом.

Заметим, что $d_n > d_n' = 2d_{n+1}$ (аналогично $d_n' > 2d_{n+1}'$). Используя п.п. 2 и 3, из леммы Б получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu\left(\sigma h\left(t - \frac{7a+b}{8},\ d_k\right),\ x\right) = \sum_{k=0}^{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} C_2\left(x - \frac{7a+b}{8}\right) \cdot \frac{1}{d_k'} + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_1 d_k \left(x - \frac{7a+b}{8}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\left(d_n' \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k'} + \frac{1}{d_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k\right) \leqslant 4C_3.$$

Отметим, что

$$\int\limits_{(7a+b)/8}^{(3a+b)/4} k(x, r)\,dx = -\int\limits_{a}^{(7a+b)/8} k(x, r)\,dx = \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

$$\int\limits_{(a+3b)/4}^{(a+7b)/8} k(x, r)\,dx = -\int\limits_{(a+7b)/8}^{b} k(x, r)\,dx = \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Заметим наконец, что нулевой коэффициент ряда σk равен нулю. Это следует из п. 2 леммы А и того, что равны нулю нулевые коэффициенты рядов σf_n.

Построим последовательность множеств E_p, $p = 0, 1, \ldots, E_p \supset E_{p+1}$, каждое из которых есть объединение не более чем счетного числа непересекающихся отрезков. Положим $E_0 = [-\pi/2, \pi/2] = r_1^0$. Если $E_p = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} r_q^p$ построено, то полагаем $E_{p+1} = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} A(r_q^p) = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} r_q^{p+1}$. Будем считать, что в множестве $\{r_q^p\}_{p=0,\, q=1}^{\infty}$ введена единая нумерация $\{r_q^p\}_{p=0,\, q=1}^{\infty} =$

$=\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем $r_0=r_1^0=[-\pi/2, \pi/2]$. Заметим, что множества $r_n \setminus A(r_n)$ при различных n не пересекаются.

Пусть $E_p=\cup r_{n_p}=\cup [a_{n_p}, b_{n_p}]$. Легко видеть, что $P=\bigcap\limits_{p=0}^{\infty}(\bigcup [{}^1/_8(7a_{n_p}+b_{n_p}), {}^1/_8(a_{n_p}+7b_{n_p})])$ — совершенное множество меры нуль.

Введем функцию $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}k(x, r_n)$, где соответствующие последовательности $(*)$ подберем позднее.

Для последовательности функций $\frac{1}{(n+1)^2}k(x, r_n)$ и тригонометрических рядов, к ним сходящихся, выполнены условия леммы А, где $E=[-\pi, \pi]$, $e_n=r_n\setminus A(r_n)$, $\varepsilon_n=C_4/(n+1)^2$, следовательно, существует тригонометрический ряд (с равным нулю нулевым коэффициентом), всюду сходящийся к функции $f(x)$.

Чтобы закончить построение примера, достаточно подобрать последовательности $(*)$ для функций $k(x, r_n)$ так, чтобы $f(x)$ была Д — X-интегрируема и (Д — X) $\int\limits_{\pi}^{\pi} f(x)\,dx<0$.

Последовательности $(*)$ для $k(x, r_0)$ выбираем произвольно. Пусть $k(x, r_n)$ построены для $r_n\subset E_p$. Последовательность a_{kn_1} для $r_{n_1}\subset E_{p+1}$, $r_{n_1}\subset r_n$ подбираем таким образом, чтобы сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^2 a_{kn_1}}{(n_1+1)^2}$ была равна половине интеграла от $k(x, r_n)$ по интервалу между r_{n_1} и ближайшим к нему слева сегментом $r_{n_2}\subset E_{p+1}$.

Нетрудно видеть, что при этом условии для всякого смежного к P интервала u_s $\int\limits_{u_s} f(t)\,dt=0$. Отметим также, что

$$\omega\left(\int f(t)\,dt;\, u_s\right)=\sup_{[\alpha,\beta]\subset u_s}\times\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt\right|\xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

Отсюда и из того, что $|P|=0$, следует

$$(\text{Д}-\text{X})\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=\int\limits_{-\pi}^{-3\pi/8} f(t)\,dt+\sum_s\int\limits_{u_s} f(t)\,dt+\int\limits_{3\pi/8}^{\pi} f(t)\,dt=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^2 a_{k0}-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^2 b_{k0}<0.$$

Таким образом, σf есть искомый ряд.

Любопытно отметить, что ряды по системам Уолша и Хаара, всюду сходящиеся к конечной функции, интегрируемой в смысле широкого интеграла Данжуа, всегда являются рядами Фурье — Данжуа своей суммы (см. ([4])). Следовательно, для рядов по системам Уолша и Хаара пример, аналогичный построенному выше, невозможен.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Скворцову за внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Скворцов, Матем. сборн., 52, № 1, 551 (1960). [2] А. Я. Хинчин, Матем. сборн., 30, № 4, 548 (1918). [3] A. Denjoy, Leçons sur le calcul des coefficients d'une serie trigonometrique, Paris, 1941—1949. [4] Ф. Г. Арутюнян, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 2, 325 (1966).