Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В. И. ПАУЛАУСКАС

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 XI 1972)

Недавно В. В. Сазоновым ([5]) методом композиций была получена неравномерная оценка в центральной предельной теореме для независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов. В настоящей заметке мы будем рассматривать случай $k=1$ и сформулируем неравномерные оценки для разнораспределенных слагаемых и в предельной теореме для независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.), принадлежащих области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha > 1$.

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные с.в. с функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Через $G_\alpha(x, \lambda)$ будем обозначать ф.р. устойчивого закона с показателем $0<\alpha\leqslant 2$ и параметром λ. (Если $\alpha\neq 1$, то $G_\alpha(x, \lambda) = G_\alpha(\lambda^{-1/\alpha}\cdot x, 1)$.) Обозначим псевдомоменты:

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i\, d\,(F(x) - G_\alpha(x, 1)),$$

$$\nu_i = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^i\, |d\,(F(x) - G_\alpha(x,1))\,|,$$

$$\bar\nu_r = |F - G_\alpha|\,(x : |x| < 1) + \int_{|x|>1} |x|^r\, |d\,(F(x) - G_\alpha(x, 1))\,|,$$

где $|\mu|(A)$ обозначает вариацию обобщенной меры μ на множестве A. Сформулируем одну равномерную оценку, которая существенно используется в доказательстве следующей неравномерной оценки.

Теорема 1. *Пусть $0<\alpha\leqslant 2$, $\alpha\neq 1$, $\varkappa = [\alpha]+1$ и $[\alpha]\leqslant m\leqslant\varkappa$ — целое число. Если $\mu_i = 0$, $i = 0, \ldots, m$, $\bar\nu_r<\infty$, $m<r\leqslant m+1$, то для всех $n\geqslant 1$*

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\} - G_\alpha(x, 1)\right| \leqslant C_1(\alpha)\,\frac{\bar\nu_r}{n^{\delta(\alpha,r)}},$$

где

$$\delta(\alpha, r) = \begin{cases} (r-\alpha)/\alpha, & \text{если } r-\alpha<1,\\ 1/\alpha, & \text{если } r-\alpha\geqslant 1.\end{cases}$$

Следствие. *Если $m = [\alpha]$, $r = \varkappa$, то*

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\} - G_\alpha(x, 1)\right| \leqslant C_1(\alpha)\,\frac{\bar\nu_\varkappa}{n^{(\varkappa-\alpha)/\alpha}}, \qquad (1)$$

а если $m=\varkappa$, $r = 1+\alpha$, то

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\} - G_\alpha(x, 1)\right| \leqslant C_1(\alpha)\,\frac{\bar\nu_{1+\alpha}}{n^{1/\alpha}}.$$

Как и в работе ([5]), можно показать, что $\bar{\nu}_r \leqslant C_2(r, \alpha) \max(\nu_r, \nu_r^{1/(r+1)})$, поэтому из следствия вытекают результаты И. Баниса ([6]) и А. Миталаускаса ([1]). Случай $\alpha = 2$, $r = 3$ составляет содержание леммы 2 из ([5]) при $k = 1$.

Теорема 2. *Пусть $1 < \alpha < 2$, $\mu_1 = 0$, $\bar{\nu}_2 < \infty$; тогда для всех $n \geqslant 1$*

$$\left| P\left\{\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i < x\right\} - G_\alpha(x, 1)\right| \leqslant \frac{C_3(\alpha)\bar{\nu}_2}{(1 + |x|)\, n^{(2-\alpha)/\alpha}}.$$

В доказательстве теоремы 2 существенную роль играет следующий аналог леммы 4 из ([4]), который имеет и самостоятельное значение.

Лемма. *Пусть $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\beta dG_\alpha(x, 1) < \infty$. Тогда для любой ф.р. $F(x)$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\beta dF(x) < \infty$, и любого $\lambda > 0$ имеет место неравенство*

$$\sup_x |x|^\beta |F(x) - G_\alpha(x, 1)| \leqslant$$
$$\leqslant C_4(\alpha) \sup_x |x|^\beta |(F - G_\alpha(\cdot, 1)) * G_\alpha(x, \lambda)| + C_5(\alpha, \beta) \max(\lambda^{1/\alpha}, \lambda^{\beta/\alpha}).$$

2. Теперь рассмотрим последовательность с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с ф.р. $F_i(x)$, $M\xi_i = 0$, $M\xi_i^2 = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть

$$\Phi_{\sigma_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/(2\sigma_i^2)} dt, \quad \Phi(x) \equiv \Phi_1(x), \quad B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2,$$

$$\nu_j = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 |d(F_j - \Phi_{\sigma_j})(x)|, \quad N_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right) \Big/ \left(\frac{1}{n} B_n^2\right)^{3/2},$$

$$\Delta_n(x) = \left| P\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i < x\right\} - \Phi(x)\right|.$$

Для простоты записи условий положим, что $\nu_j > 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$ (если бы среди с.в. ξ_i были нормальные слагаемые, то мы могли бы поступить так же, как и в ([2], [3])). Пусть $i(n)$ обозначает такой индекс, что

$$\sigma_{i(n)}^2 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k^2.$$

Теорема 3. *Пусть с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ удовлетворяют условиям*

$$\sigma_{i(k)}^2 \leqslant C_6 B_k^2, \quad C_6 < 0,3, \quad \nu_{i(k)} \leqslant C_7 \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \nu_i, \quad k = 4, 5, \dots, n.$$

Тогда существует константа C_8, зависящая только от C_7 такая, что для всех $n \geqslant 1$

$$\Delta_n(x) \leqslant C_8 \frac{\max(N_n, N_n^{1/4})}{(1 + |x|^3)\sqrt{n}}.$$

Нетрудно видеть, что приведенная оценка усиливает результат из ([3]). Как и в ([2], [3]), мы можем получить аналогичные следствия из теоремы 3.

Автор благодарит В. В. Сазонова, предоставившего возможность ознакомиться с работой ([5]) до ее публикации.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило
16 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Миталаускас, Литовск. Матем. сборн., 11, 627 (1971). [2] В. И. Паулаускас, ДАН, 199, 26 (1971). [3] V. I. Paulauskas, Liet. mat. rink., 11, 627 (1971). [4] В. И. Ротарь, Теория вероятн. и ее примен., 15, 647 (1970). [5] V. V. Sazonov, Proc. of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1970. [6] И. И. Банис, Литовск. матем. сборн., 12, 1, 41 (1972).