Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 517.948.35+517.512.2 МАТЕМАТИКА

В. А. ИЛЬИН

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФИНИТНОЙ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА L_p^α ПРИ $p \neq 2$ В МЕТРИКЕ L_p^α

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 V 1972)

Одним из центральных достижений О. А. Ладыженской в спектральной теории явилась теорема о том, что ряд по собственным функциям эллиптического оператора второго порядка всякой финитной (или хотя бы удовлетворяющей определенным краевым условиям) функции $f(x)$ из класса Соболева W_2^n целого порядка n сходится к этой функции в метрике W_2^n (см. ([1])).

Наиболее естественным обобщением классов Соболева на нецелые порядки дифференцируемости являются так называемые классы Лиувилля L_p^α, совпадающие при целом α с классами Соболева W_p^α (см. ([2])). Легко показать, что при $p=2$ результат Ладыженской справедлив для любого не обязательно целого $\alpha>0$, т. е. спектральное разложение всякой финитной функции из класса L_2^α сходится к этой функции в метрике $L_2^\alpha(G')$, где G' — произвольная строго внутренняя подобласть основной области G*.

В ноябре 1970 г. С. Л. Соболев поставил задачу об изучении сходимости спектральных разложений функций из класса W_p^n при $p\neq 2$ в метрике W_p^n.

В настоящей работе дается отрицательное решение этой и несколько более общей задачи. Мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для любого p из полупрямой $1 \leqslant p < \infty$, не равного двум, и для любого $\alpha > 0$ существует финитная функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x)$ из класса $L_p^\alpha(E_N)$, разложение которой в N-кратный интеграл Фурье расходится в метрике L_p^α.*

Теорема 2. *Для любого $N \geqslant 2$, любого p из полуинтервала $1 \leqslant p < 2N/(N+1)$ и любого $\alpha > 0$ существует финитная относительно произвольной N-мерной области G функция $f(x)$ из класса $L_p^\alpha(G)$, спектральное разложение которой, отвечающее произвольному неотрицательному самосопряженному расширению $\mathscr{L}$ оператора Лапласа в области G, расходится даже в метрике L_1^α.*

Остановимся на доказательстве теорем 1 и 2. Доказательство теоремы 1 существенно использует развитый автором настоящей статьи аппа-

* Так, для случая оператора Лапласа сначала в полной аналогии с доказательством леммы 4 работы ([6]) устанавливается, что для любой финитной в области G функции $f(x)$ из класса $L_2^\alpha(G)$ и для любого самосопряженного неотрицательного расширения $\mathscr{L}$ оператора Лапласа в области G существует функция $h(x)$ из класса $L_2(G)$ такая, что $f(x) = \int\limits_G T_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy$, где $T_\alpha(x, y)$ — ядро порядка α, отвечающее расширению $\mathscr{L}$. Далее остается заметить, что для ядра $T_\alpha(x, y)$ справедливо приводимое в тексте настоящей работы представление (2), в силу которого $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \int\limits_G \varphi_\alpha(x, y) h(y)\, dy$, $f_2(x) = \int\limits_G \psi_\alpha(x, y) h(y)\, dy$, причем спектральное разложение $f_1(x)$ сходится в метрике $L_2^\alpha(G')$ в силу результатов работы ([7]), а спектральное разложение $f_2(x)$ сходится в метрике $L_2^\alpha(G')$ в силу свойств функции $\psi_\alpha(x, y)$.

рат ядер дробного порядка и недавний результат Феффермана ([3]), согласно которому при $N \geqslant 2$ и при любом $p \neq 2$ существует обладающая компактным носителем функция $h(x)$ из класса $L_p(E_N)$ разложение которой в N-кратный интеграл Фурье является расходящимся в метрике L_p.

Обозначим символом $T_\alpha(x, y)$ так называемое ядро Бесселя — Макдональда, равное

$$T_\alpha(x, y) = [\pi^{N/2}\Gamma(\alpha/2)]^{-1}\cdot 2^{(2-\alpha)/2} r_{xy}^{(\alpha-N)/2} K_{(N-\alpha)/2}(r_{xy}),$$

где $r = r_{xy}$ — расстояние между точками x и y, $K_\nu(r)$ — так называемая функция Макдональда. Заметим, что для рассматриваемого случая интеграла Фурье ядро $T_\alpha(x, y)$ совпадает с построенным автором настоящей статьи ядром дробного порядка (см. ([4], [5]) и лемму 3 из ([6])), определяемым как функция, образ Фурье которой при фиксированной точке x равен $\hat{T}_\alpha(x, \lambda) = e^{i(x,\lambda)}(1+|\lambda|^2)^{-N+\alpha/2}$.

По определению, функция

$$F(x) = \int T_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy \tag{1}$$

принадлежит классу Лиувилля $L_p^\alpha(E_N)$, причем образы Фурье функций $F(x)$ и $h(x)$ связаны соотношением $\hat{F}(\lambda) = (1+|\lambda|^2)^{-N+\alpha/2}\hat{h}(\lambda)$, так что для спектральных разложений $S_\Lambda(x, F)$ и $S_\Lambda(x, h)$ функций $F(x)$ и $h(x)$ справедливо равенство

$$S_\Lambda(x, F) = \int T_\alpha(x, y)\cdot S_\Lambda(y, h)\, dy.$$

Из последнего равенства вытекает, что спектральное разложение $S_\Lambda(x,F)$ расходится в метрике L_p^α при $\Lambda \to \infty$, ибо в противном случае спектральное разложение $S_\Lambda(x, h)$ сходилось бы при $\Lambda \to \infty$ в метрике L_p. Построенная нами функция $F(x)$ не обладает, вообще говоря, компактным носителем. Для построения аналогичной функции, обладающей компактным носителем, обратимся к установленному нами представлению ядер дробного порядка (в удобной для нас форме см. лемму 3 из работы ([6])).

Нами доказано, что для любого достаточно малого фиксированного $R > 0$, любого фиксированного номера n и любого α из интервала $0 < \alpha < 2N$ ядро $T_\alpha(x, y)$ представимо в виде

$$T_\alpha(x, y) = \varphi_\alpha(x, y) + \psi_\alpha(x, y), \tag{2}$$

где

$$\varphi_\alpha(x, y) = \bar{\varphi}_\alpha(r) =$$

$$= \begin{cases} \left[\pi^{N/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}\cdot 2^{(2-\alpha)/2} r^{(\alpha-N)/2} K_{(N-\alpha)/2}(r) + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k r^{2k} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r \geqslant R; \end{cases}$$

r обозначает расстояние между точками x и y, а постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_n$ выбраны так, что при $r = R$ сама функция $\bar{\varphi}_\alpha(r)$ и все ее производные до порядка n включительно обращаются в нуль; функция же $\psi_\alpha(x, y)$ определяется интегралом вида

$$\psi_\alpha(x, y) = \lim_{\Lambda\to\infty}(2\pi)^{-N}\int\limits_{|\lambda|^2\leqslant\Lambda} e^{i(x-z,\lambda)}\gamma_\lambda(\alpha)\, d\lambda$$

с оценкой для зависящих от x и y чисел $\gamma_\lambda(\alpha)$ вида

$$\gamma_\lambda(\alpha) = O[(|\lambda|^2+1)^{-N/4-n/2}]. \tag{3}$$

В соответствии с (2) функцию $F(x)$ можно представить в виде суммы $F(x) = f(x) + g(x)$,

$$f(x) = \int \varphi_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy, \quad g(x) = \int \psi_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy.$$

Из оценки (3) сразу же вытекает, что при достаточно большом n разложение в интеграл Фурье функции $g(x)$ заведомо сходится в метрике L_p^α. Отсюда следует, что разложение в интеграл Фурье функции $f(x)$ расходится в метрике L_p^α. Для завершения доказательства теоремы 1 для случая $0 < \alpha < 2N$ остается заметить, что функция $f(x)$, в силу свойств $\varphi_\alpha(x, y)$, имеет компактный носитель и, согласно известному результату ([7]), принадлежит L_p^α. Случай $\alpha \geqslant 2N$ тривиально сводится к случаю $0 < \alpha < 2N$.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что в силу леммы 2.3 из работы ([5]) функция $T_{\frac{1}{2}(N+1)+\varepsilon}(x_0, x)$ для любого $\varepsilon > 0$ и любой фиксированной внутри G точки x_0 имеет расходящееся в метрике L_1 спектральное разложение и принадлежит классу L_p при любом p, удовлетворяющем условию $p < N / (\frac{1}{2}(N+1) + \varepsilon)$.

Представляя ядро $T_{\frac{1}{2}(N+1)+\varepsilon}(x_0, x)$ в виде суммы (2), получим финитную относительно области G функцию $h(x) = \varphi_{\frac{1}{2}(N+1)+\varepsilon}(x_0, x)$, принадлежащую указанному классу L_p и имеющую расходящееся в метрике L_1 спектральное разложение. Остается заметить, что $f(x) = \int \varphi_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy$ и представляет собой функцию, составляющую содержание теоремы 2.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953. [2] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [3] Ch. Fefferman, Ann. Math., 94, № 6, 330 (1971). [4] В. А. Ильин, Математич. сборн., 41 (83), 4, 459 (1957). [5] В. А. Ильин, Ш. А. Алимов, Дифференциальные уравнения, 7, № 4—№ 5, 670, 851 (1971). [6] В. А. Ильин, Математич. заметки, 8, № 5, 595 (1970). [7] S. M. Nicolsky, J. L. Lions, P. I. Lizorkin, Ann. della Scuola Norm. Super di Pisa, ser. 3, 19, Fasc. II, 127 (1965).