Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

УДК 519.4 : 517 : 513.88 МАТЕМАТИКА

В. С. ШУЛЬМАН

ТЕОРЕМА ФАГЛИДА — ПАТНЭМА И РЕФЛЕКСИВНОСТЬ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 21 VIII 1972)

Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H_1, B — оператор в гильбертовом пространстве H_2. Обозначим через $\operatorname{int}(A,B)$ «сплетение» операторов A и B:

$$\operatorname{int}(A,B) = \{X \in \mathfrak{B}(H_1, H_2) : XA = BX\}.$$

Известная теорема Фаглида — Патнэма ([1], [2]) гласит, что для нормальных операторов A и B $\operatorname{int}(A^*, B^*) = \operatorname{int}(A,B)$. Используя этот результат, нетрудно доказать, что для нормальных операторов A и B пространство $\operatorname{int}(A,B)$ рефлексивно (в смысле ([3]): множество $S \subset \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ называется рефлективным, если оно совпадает с множеством

$$\operatorname{Alglat} S \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{x \in H_1} \{\{X \in \mathfrak{B}(H_1, H_2) : Xx \in \overline{Sx}\}).$$

Если пространства H_1 и H_2 конечномерны, то для рефлективности пространства $\operatorname{int}(A, B)$ необходимо и достаточно, чтобы либо спектры операторов A и B не пересекались (тогда $\operatorname{int}(A, B) = (0)$), либо хотя бы один из операторов A, B был подобен нормальному оператору. В частности, коммутант $(A') = \operatorname{int}(A, A)$ оператора A, действующего в конечномерном пространстве, рефлексивен тогда и только тогда, когда оператор A подобен нормальному оператору.

В настоящей работе мы обобщим эти утверждения, рассматривая операторы более широкого класса, чем нормальные или конечномерные, а именно, операторы, порождающие конечные W^*-алгебры типа I.

Напомним (см. ([5]), стр. 67), что оператор A называется квазиаффинным преобразованием оператора A', если пространство $\operatorname{int}(A, A')$ содержит оператор с нулевым ядром и плотным образом. Если, кроме того, A' — квазиаффинное преобразование A, то операторы A и A' квазиподобны.

Предложение 1. *Если оператор A — квазиаффинное преобразование оператора A', оператор B' — квазиаффинное преобразование оператора B и пространство $\operatorname{int}(A, B)$ рефлексивно, то пространство $\operatorname{int}(A', B')$ также рефлексивно.*

Следствие. *Оператор, квазиподобный оператору с рефлексивным коммутантом, также имеет рефлексивный коммутант.*

Предложение 2. *Пусть $A \bigoplus_{\alpha \in J_1} A_\alpha$, $B = \bigoplus_{\beta \in J_2} B_\beta$ (символ $\oplus$ использован для обозначения прямой суммы). Для рефлексивности пространства $\operatorname{int}(A, B)$ необходимо и достаточно, чтобы все пространства $\operatorname{int}(A_\alpha, B_\alpha)$ были рефлексивны.*

Пусть A — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, n — натуральное число. Обозначим через $H^{(n)}$ прямую сумму n экземпляров пространства H и через $J(n, A)$ — оператор в $H^{(n)}$, определенный следующей $(n \times n)$-матрицей с коэффициентами из $\mathfrak{B}(H, H)$:

$$J(n, A)_{ij} = \begin{cases} A, & j = i, \\ 1_H, & j = i + 1, \\ 0, & j \neq i,\ j \neq i + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Предложение 3. *Оператор, порождающий конечную W^*-алгебру типа I, квазиподобен прямой сумме операторов вида $(*)$.*

Предложение 4. *Пусть A и B — нормальные операторы, n и m — натуральные числа. Для того чтобы пространство* $\mathrm{int}(J(n, A),\ J(m, B))$ *было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих условий*: а) $n = 1$, б) $m = 1$, в) *спектральные меры операторов A и B взаимно сингулярны.*

Из предложений 1—4 непосредственно получаем следующий результат.

Предложение 5. *Если каждый из операторов A и B порождает конечную W^*-алгебру типа* I *и, кроме того,* $\mathrm{int}(A, B) \neq 0$, *то для рефлексивности пространства* $\mathrm{int}(A, B)$ *необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из операторов A, B был квазиподобен нормальному оператору.*

Следствие. *Оператор, порождающий конечную W^*-алгебру типа* I, *имеет рефлексивный коммутант тогда и только тогда, когда он квазиподобен нормальному оператору.*

Вообще говоря, оператор, коммутант которого рефлексивен, не обязан быть квазиподобным нормальному оператору. Примером может служить односторонний сдвиг (см. ([4])). Аналогично, нормальность одного из операторов A, B недостаточна для рефлексивности $\mathrm{int}(A, B)$: сплетение одностороннего сдвига с двусторонним нерефлексивно. Используя теорему о дилата́ции коммутанта (([5]), стр. 74), можно доказать следующее более общее утверждение.

Предложение 6. *Если A и B — изометрии, то для рефлексивности пространства* $\mathrm{int}(A, B)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих условий*: а) *спектральная мера унитарной части оператора B сингулярна с мерой Лебега на окружности*; б) *оператор A унитарен.*

Предложение 7. *Если A — изометрия, B — неунитарная коизометрия, то пространство* $\mathrm{int}(A, B)$ *рефлексивно тогда и только тогда, когда A — сингулярный унитарный оператор.*

Автор благодарит А. И. Логинова, дружеские замечания которого значительно способствовали работе над данной статьей.

Бакинское отделение
Всесоюзного научно-исследовательского
проектно-конструкторского института
технологии электромашиностроения

Поступило
14 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Fuglede, Proc. Am. Math. Soc., 36, 35 (1950). [2] C. Putnam, Am. J. Math., **73**, 357 (1951). [3] В. С. Шульман, Матем. сборн., **87**, 2, 178 (1972). [4] D. Sarason, Pacif. J. Math., **17**, 511 (1966). [5] Б. Секефальви-Надь, К. Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970.