Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

УДК 519.2+519.3

МАТЕМАТИКА

Д. Б. ЮДИН

# МНОГОЭТАПНЫЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 IX 1972)*

Многоэтапные задачи стохастического программирования являются математическими моделями перспективного планирования, управления динамическими объектами и многостадийного проектирования в условиях неполной информации.

1°. Приведем формальную постановку многоэтапной задачи стохастического программирования.

Пусть $\Omega_i$, $i=0, 1, \ldots, n$,— некоторые множества — пространства элементарных событий $\omega_i$ на $i$-м этапе. Пространство $\Omega_0$ состоит из единственного элемента $\omega_0$. Обозначим через $\Omega^k$ декартово произведение $\Omega_i$, $i=1, \ldots, k$; $\omega^k=(\omega_1, \ldots, \omega_k)\in\Omega^k$; $\Omega^n\equiv\Omega$. Пусть на $\Omega$ задана вероятностная мера $P$. Мера (вероятностная) $P^k$ на $\Omega^k$ определяется следующим образом: если $A\subset\Omega^k$, то $P^k=P(A\times\Omega_{k+1}\times\ldots\times\Omega_n)$. Наконец, $P_k$ — условная вероятностная мера на $\Omega_k$: для любых $A\subset\Omega_k$, $B\subset\Omega^{k-1}$

$$P_k(A/\omega^{k-1}\in B)=\frac{P^k(A\times B)}{P^k(\Omega_k\times B)}.$$

Рассмотрим последовательность множеств $X_i$, $i=0, 1, \ldots, n$; $x_i\in X_i$. Множество $X_0$ состоит из одной точки $x_0$. Обозначим через $X^k$ декартово произведение $X_i$, $i=1, \ldots, k$; $x^k=(x_1, \ldots, x_k)$; $X^n\equiv X$. Пусть для каждого $\omega^k\in\Omega^k$ и $x^k\in X^k$, $k=1, \ldots, n$, задана вектор-функция $\psi_k(\omega^k, x^k)$ размерности $m_k$, а на множестве $X$ для каждого $\omega\in\Omega$ задан ограниченный снизу функционал $\psi_0(\omega^n, x^n)$. Пусть, кроме того, $G_k=G_k(\omega^k)$, $k=1, \ldots, n$,— некоторые, вообще говоря, случайные множества, а $b_k=b_k(\omega^{k-1})$ — случайные $m_k$-мерные величины — ограниченные измеримые вектор-функции от $\omega^{k-1}$. Соответственно $b^k(\omega^{k-1})$ — вектор-функция размерности $\sum_{i=1}^{k} m_i$. Определим норму $b^k(\omega^{k-1})$ следующим образом:

$$\|b^k(\omega^{k-1})\|=\max\left(|b_1|, \sup_{\omega^1}|b_2(\omega^1)|, \ldots, \sup_{\omega^{k-1}}|b_k(\omega^{k-1})|\right),$$

где через $|b_j|$ обозначается эвклидова норма вектора $b_j$ в $m_j$-мерном эвклидовом пространстве. Совокупность всех таких векторов образует банахово пространство $B_k$.

Обозначим, кроме того, через $M(\psi_k(\omega^k, x^k))$ математическое ожидание $\psi_k$. Функции $F_\omega$, $F_{\omega,x}$, $F_x$ и $F_{x/\omega}$ соответственно — функция распределения $\omega$, совместная функция распределения $\omega$ и $x$, безусловная и условная (в предположении, что известна реализация $\omega$) функции распределения $x$.

2°. Рассмотрим следующую многоэтапную стохастическую задачу:

$$M\psi_0(\omega^n, x^n)\to\inf, \tag{1}$$

$$M\psi_k(\omega^k, x^k)\geqslant b_k, \tag{2}$$

$$x^k\in G_k, \quad k=1, \ldots, n. \tag{3}$$

Чтобы задача была полностью поставлена, необходимо еще указать, являются ли ограничения безусловными или условными, определяются ли решения задачи в чистых или смешанных стратегиях и среди какого класса измеримых функций или распределений следует искать решение.

В зависимости от содержательного смысла конкретных многоэтапных задач планирования, управления или проектирования решение на каждом этапе можно вычислять как детерминированный вектор, как решающее правило — функцию от реализованных и наблюденных случайных параметров условий — или как решающее распределение — условное распределение $x_k$ в предположении, что получена та или иная информация о реализованных значениях случайных исходных данных. Информация, поступающая к моменту выбора очередного решения, определяет информационную структуру задачи и конкретизирует ее постановку.

Общая многоэтапная стохастическая задача с безусловными ограничениями имеет вид

$$\int\limits_{\Omega^n\times X^n} \psi_0(\omega^n, x^n)\, dF_{\omega^n, x^n} \to \inf, \tag{4}$$

$$\int\limits_{\Omega^k\times X^k} \psi_k(\omega^k, x^k)\, dF_{\omega^k, x^k} \geqslant b_k, \tag{5}$$

$$x^k \in G_k(\omega^k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Из множества информационных структур, отвечающих многоэтапной задаче с условными ограничениями, выделим несколько классов, представляющих наибольший интерес для приложений.

Пусть задача с условными ограничениями решается в смешанных стратегиях. В этом случае конкретизация модели (1)—(3) имеет вид

$$\int\limits_{\Omega^n\times X^n} \psi_0(\omega^n, x^n)\, dF_{\omega^n, x^n} \to \inf, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\Omega_k\times X_k} \psi_k(\omega^k, x^k)\, dF_{x_k/\omega^k}\, dF_{\omega^k/\omega^{k-1}} \geqslant b_k(\omega^{k-1}), \tag{8}$$

$$x^k \in G_k(\omega^k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Решением задачи является набор функций распределения $F_{x_k/\omega^{k-1}}$. Будем говорить, что *задача решается в апостериорных решающих распределениях*, если $F_{x_k/\omega^{k-1}}$ определяются после реализации и наблюдения случайных параметров $\omega^k$. Апостериорные решающие распределения зависят от $x^{k-1}$ и $\omega^k$. Задача решается *в априорных решающих распределениях*, если $F_{x_k/\omega^{k-1}}$ определяется после реализации и наблюдения $\omega^{k-1}$, но до наблюдения $\omega_k$. Априорные решающие распределения зависят от $x^{k-1}$ и $\omega^{k-1}$.

Пусть теперь задача с условными ограничениями решается в чистых стратегиях. При этом конкретизация модели (1)—(3) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega^n} \psi_0(\omega^n, x^n)\, dF_{\omega^n} \to \inf, \tag{10}$$

$$\int\limits_{\Omega_k} \psi_k(\omega^k, x^k)\, dF_{\omega^k/\omega^{k-1}} \geqslant b_k(\omega^{k-1}), \tag{11}$$

$$x^k \in G_k(\omega^k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Решением задачи является набор функций $x_k$ от реализованных и наблюденных случайных параметров условий задачи. Будем говорить, что *задача решается в апостериорных решающих правилах*, если решение принимается после реализации и наблюдения $\omega^k$.

Апостериорные решающие правила имеют вид $x_k = x_k(\omega^k)$. Задача решается в априорных решающих правилах, если решение принимается после реализации и наблюдения $\omega^{k-1}$, но до наблюдения $\omega_k$. Априорные решающие правила имеют вид $x_k = x_k(\omega^{k-1})$.

Будем называть задачи (7)—(9) (или (10)—(12)) многоэтапными стохастическими задачами в жесткой постановке, если условия вида (8) (или соответственно (11)) в них отсутствуют и решение на $i$-м этапе принимается после наблюдения параметров условий и решений предшествующих этапов.

3°. Соотношение между решениями многоэтапных задач стохастического программирования с безусловными и условными ограничениями определяется следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть $U$ — множество допустимых решений многоэтапной стохастической задачи с безусловными ограничениями*

$$U = \{x^n \in G_1 \times \ldots \times G_n \,/\, M\psi_k(\omega^k, x^k) \geqslant b_k, \ k = 1, \ldots, n\},$$

*а $V[b^n(\omega^{n-1})]$ — множество решений (решающих правил или решающих распределений, апостериорных или априорных) задачи с условными ограничениями,*

$$V[b^n(\omega^{n-1})] =$$
$$= \{x^n \in G_1 \times \ldots \times G_n \,/\, M[\psi_k(\omega^k, x^k) \,/\, \omega^{k-1}] \geqslant b_k(\omega^{k-1}), \ k = 1, \ldots, n\}.$$

*Тогда*

$$U = \{x^n \in V[\tilde{b}^n(\omega^{n-1})] \,/\, M\tilde{b}_k(\omega^{k-1}) = b_k, \ k = 1, \ldots, n\}.$$

4°. Установим соотношения между решающими распределениями и решающими правилами.

Ясно, что если функция $\psi_0$ и компоненты вектор-функций — $\psi_k$ выпуклы по $x$ при каждом $\omega$, то оптимальные значения целевого функционала, достигаемые на решающих распределениях, достигаются и на решающих правилах. Для стохастических задач в жесткой постановке оптимальные априорные решающие правила определяют такое же значение показателя качества решения, что и оптимальные решающие распределения.

Для апостериорных решающих правил и решающих распределений имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть*

а) *вероятностная мера на $\Omega \equiv \Omega^n$ непрерывна,*

б) *существуют положительные функции $g_0(\omega^n)$ и $g_k(\omega^k)$, ограничивающие по модулю соответственно $\psi_0(\omega^n, x^n)$ и все составляющие $\psi_k(\omega^k, x^k)$.*

*Тогда оптимальные апостериорные решающие правила многоэтапной задачи стохастического программирования определяют такое же значение целевого функционала, что и оптимальные апостериорные решающие распределения.*

Теорему достаточно доказать для одноэтапной задачи. Вначале приводится метод построения отображения $\omega \to \mu_\omega$, относящего каждому $\omega \in \Omega$ вероятностную меру $\mu_\omega$ на $X$ так, что для любых множеств $A \subset \Omega$ и функций $f(\omega, x)$ имеет место

$$\int_{A \times X} f(\omega, x)\, dF_{\omega, x} = \int_A \left\{ \int_X f(\omega, x)\, d\mu_\omega \right\} dF_\omega.$$

Поскольку $\mu_\omega$ — вероятностная мера, имеет место соотношение

$$\int_X \psi(\omega, x)\, d\mu_\omega \in \operatorname{co} Y(\omega),$$

где

$$\psi(\omega, x) = \{\psi_i(\omega, x)\}, \; i=1, \ldots, m,$$

$$Y(\omega) = \{y \in R^{m+1} \mid y_i = \psi_i(\omega, x) \text{ для некоторого } x \in X, \; i=0, 1, \ldots, m\}.$$

Из теоремы Кастена [1] следует, что при условиях а) и б) имеет место равенство

$$\int_\Omega Y(\omega)\, dF_\omega = \int_\Omega \operatorname{co} Y(\omega)\, dF_\omega.$$

Поэтому

$$\int_\Omega \left\{ \int_X \psi(\omega, x)\, d\mu_\omega \right\} dF_\omega \in \int_\Omega \operatorname{co} Y(\omega)\, dF_\omega = \int_\Omega Y(\omega)\, d\omega$$

и существует функция $x(\omega)$ такая, что

$$\int_\Omega \psi(\omega, x(\omega))\, dF_\omega = \int_\Omega \left\{ \int_X \psi(\omega, x)\, d\mu_\omega \right\} dF_\omega = \int_{\Omega \times X} \psi(\omega, x)\, dF_{\omega, x}.$$

Автор благодарит А. Д. Иоффе за обсуждение и полезные советы.

Поступило
22 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ch. Castaing, Sur les multi-applications mesurables, RIRO, 1 année, № 1, 91 (1967).