Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

В. И. КРУГЛИКОВ

К ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 II 1972)

1. Пусть $p(z)$, $\theta(z)$ — характеристики в смысле М. А. Лаврентьева отображения $w=f(z)$ в области D; $p(z)\geqslant 1$ определена почти всюду в D; $\theta(z)$, $0\leqslant\theta(z)<2\pi$, определена почти всюду на множестве $\{z: p(z)>1\}$.

Классическая теория квазиконформных отображений рассматривает случай

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in D} p(z)\leqslant q<\infty,$$

в котором имеется теорема существования и единственности [1-3].

Нарушение глобальных свойств квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками (см., например, [7]) приводит к двум возможным подходам выделения классов отображений, в которых имела бы место теорема существования. Первый из них (локальный) связан с работами [4,5], где устанавливается существование гомеоморфизма плоскости на себя, локально квазиконформного вне множества

$$E=\{z:\lim_{\varepsilon\to 0}\ \operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta-z|\leqslant\varepsilon} p(\zeta)=\infty\}.$$

В то же время И. Н. Песиным [6,7] было замечено, что глобальная теория отображений с неограниченными характеристиками может быть развита, если потребовать ограниченность некоторого интегрального среднего (по крайней мере, экспоненциального типа) от $p(z)$. В выделенном им специальным образом классе отображений «квазиконформных в среднем» также имеет место теорема существования. Следует отметить, что существование искомого отображения в этом случае может быть установлено фактически в классе, более узком в сравнении с классом, определяемым И. Н. Песиным. Здесь мы формулируем утверждение, уточняющее упомянутую теорему существования И. Н. Песина и указываем также одно достаточное условие единственности.

2. Пусть $w=f(z)=u(z)+iv(z)$ — непрерывное отображение области D плоскости $z=x+iy$ в плоскость $w=u+iv$. Вещественные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ предполагаем обладающими обобщенными в смысле С. Л. Соболева частными производными первого порядка.

Пусть $\Phi(t)$ — некоторая выпуклая N-функция [8], удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt=\infty.$$

Будем говорить, что отображение $w=f(z)$ принадлежит классу BL_k^Φ в D, если

$$\|\lambda(z,f)\|_\Phi\leqslant k<\infty,$$

где $\lambda(z,f)=(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2)^{1/2}$, а в качестве $\|\cdot\|_\Phi$ берется норма Орлича (см. [8]).

Данный класс отображений (при несколько ином определении) был введен В. М. Миклюковым [9] в качестве непосредственного обобщения класса BL_k [10].

Лемма 1. *Класс отображений BL_k^Φ равностепенно непрерывен и замкнут относительно равномерной сходимости в области D.*

3. Пусть D — произвольная ограниченная область и E — замкнутое множество, $E \subset D$. Обозначим через $C(E, D)$ совокупность неотрицательных бесконечно дифференцируемых, финитных в D функций $\varphi(z)$ таких, что $\varphi(z) = 1$ при $z \in E$ и $\varphi(z) \leqslant 1$ при $z \in D \setminus E$.

Для некоторой N-функции $\Psi(\tau)$, имеющей непрерывную строго монотонно возрастающую производную, величину

$$\mathrm{C.V.}_{(\Psi)}(E,\ D) \equiv \inf_{\varphi \in C(E,D)} \iint_D \Psi\left[|\nabla\varphi(z)|\right] dx\,dy$$

назовем вариационной Ψ-емкостью (или просто Ψ-емкостью) множества E относительно области D.

В некоторых простых частных случаях Ψ-емкость может быть вычислена.

Лемма 2. *Пусть $D: |z| < R$, $E: |z| \leqslant r$, $0 < r < R$. Тогда*

$$\mathrm{C.V.}_{(\Psi)}(E,\ D) = 2\pi \int_r^R \Psi\left[\Phi'\left(\frac{\nu_0}{t}\right)\right] t\,dt,$$

где $\Phi(t)$ — N-функция, дополнительная к $\Psi(\tau)$ [8], а ν_0 — единственный положительный корень уравнения

$$\int_r^R \Phi'\left(\frac{\nu}{t}\right) dt = 1.$$

Нас будут интересовать лишь множества нулевой Ψ-емкости. Хорошо известно, что при $\Psi(\tau) = \tau^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, плоских множеств нулевой Ψ-емкости не существует.

Пусть, здесь и далее, $\Phi(\tau)$ и $\Psi(\tau)$ суть дополнительные друг к другу N-функции.

Лемма 3. *Если h — мера Хаусдорфа с*

$$h(r) = \left[\int_1^{1/r} \frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt\right]^{-1}$$

замкнутого множества $E \subset D$ равна нулю, то

$$\mathrm{C.V.}_{(\Psi)}(E,\ D) = 0.$$

4. Рассмотрим следующий специальный класс N-функций. Пусть $F(t)$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая N-функция, удовлетворяющая условию

$$[\ln F(t)]'' \geqslant 0 \text{ при } t \geqslant t_0 > 0. \tag{1}$$

Введем функцию $\Phi(t)$ равенством

$$\Phi(t) = [t / M^{-1}(t)]^2,$$

где $M^{-1}(t)$ — функция, обратная к $M(t) = t\sqrt{F(t^2)}$.

Условие (1) позволяет сделать следующие заключения о функции $\Phi(t)$:

1) $\Phi(t)$ есть N-функция, обладающая непрерывной строго монотонно возрастающей производной;

2) $\int\limits_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt = \infty$.

Заметим, что условию (1) удовлетворяет, в частности, N-функция $F(t) = \exp t^{1+\alpha} - 1$, $\alpha > 0$, участвующая в теореме существования И. Н. Песина.

5. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $p(z)$, $\theta(z)$ — измеримые функции, задающие распределение характеристик в круге $D: |z| < 1$ и $\iint\limits_D F[p(z)]\,dx\,dy \leqslant K < \infty$ для некоторой N-функции $F(t)$, удовлетворяющей условию* (1).

Тогда существует топологическое отображение $w = f(z)$ круга $D: |z| < 1$ на круг $\Delta: |w| < 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, характеристики которого почти всюду в D совпадают с заданными $p(z)$, $\theta(z)$ и такое, что $f \in BL_{k_1}{}^{\Phi}$ в D, $f^{-1} \in BL_{k_2}$ в Δ.

Функция $\Phi(t)$ определяется по $F(t)$, как в п. 4; k_1, k_2 — постоянные, определяемые по K.

Если потребовать дополнительно, что множество

$$E = \{z \in D: \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{ess} \sup_{|\zeta - z| \leqslant \varepsilon} p(\zeta) = \infty\}$$

замкнуто, $E \subset D$ и имеет нулевую Ψ-емкость относительно D, то отображение $w = f(z)$ единственно в указанном выше классе.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
2 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., 42, 407 (1935). [2] П. П. Белинский, И. Н. Песин, ДАН, 102, № 5, 865 (1955). [3] Б. В. Боярский, ДАН, 102, № 4, 661 (1955). [4] O. Lehto, Lect. Notes Math., 118, 58 (1970). [5] O. Lehto, Proc. of the Romanian — finnish Seminar on Teichmuller Spaces and Quasiconformal Mappings, Brasov — Romania, 1969, Bucurest, 1971, p. 203. [6] И. Н. Песин, Тез. XL научн. конфер. Львовск. гос. унив., Львов, 1960, стр. 11. [7] И. Н. Песин, ДАН, 187, № 4, 740 (1969). [8] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. [9] В. М. Миклюков, ДАН, 183, № 4, 772 (1968). [10] Г. Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965.