Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 6

УДК 51:330.115 МАТЕМАТИКА

Академик Л. В. КАНТОРОВИЧ, В. И. ЖИЯНОВ

ОДНОПРОДУКТОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ФОНДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

Рассматривается экономическая система, в которой создается один продукт, причем часть его идет на потребление, а часть на увеличение основных (и оборотных) фондов [1].

Пусть $T(t)$ — ресурсы труда в момент времени t, $K(t)$ — основные фонды (номинальные), имеющиеся на момент времени t. Введем параметр $\lambda(t)$ — тип (или структура) создаваемых в момент времени t новых фондов, характеризуемый ценой (выраженной в продукте) единичных фондов (фондов, приходящихся на единицу труда), иначе говоря, обеспечиваемая ими степень фондовооруженности. Предполагается, что фонды, создаваемые в момент времени t, однотипные ($\lambda(t)$ — однозначная функция t).

Через $\varphi(t)$ обозначим интенсивность создания фондов, т. е. $\varphi(t)\,dt$ — количество новых рабочих мест, созданных за время $[t,\ t+dt]$, тогда $\lambda(t)\varphi(t)\,dt$ — объем вновь созданных фондов в том же интервале. Функции $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ (и $K(t)$) в модели подлежат нахождению.

Предполагаем, что возможные производственные способы характеризуются производственной функцией $U(x,\ y)$, которая показывает количество чистого продукта, создаваемого трудом y при использовании основных фондов x в единицу времени (на начальный момент). Относительно функции $U(x,\ y)$ предполагается, что она является положительно однородной первой степени,

$$U(\lambda x,\ \lambda y) = \lambda U(x,\ y) \text{ при } \lambda > 0,$$

и базируется на оптимальных способах, что делает естественным предположение о выпуклости $U(x, 1)$.

Учет технического прогресса в модели производится следующим образом. Предполагается, что количество чистого продукта, произведенного в единицу времени при данном размере фондов и затратах труда, возрастает экспоненциально в зависимости от момента создания фондов τ — превосходит в $e^{\delta\tau}$ раз количество продукции, производимое на фондах, созданных в начальный момент, при тех же условиях.

Предполагается также, что в процессе развития экономики происходит снятие трудовых ресурсов с фондов низкой структуры, давно созданных. Трудовые ресурсы, высвободившиеся со снятых фондов, используются на вновь создаваемых фондах. Оставленные фонды в дальнейшем не используются. Как будет видно из дальнейшего, это предполагает выполнение для функции $\varphi(t)$ условия $\varphi(t) \geqslant T'(t)$ при $t \geqslant t_0$.

Пусть далее множество E_t, принадлежащее отрезку $[0,\ t]$, определяется тем, что $\tau \in E_t$, если фонды, созданные в момент τ, $\tau < t$, сохранены и используются ко времени t.

Тогда количество чистой продукции (национальный доход), производимый в момент t в расчете на единицу времени, составляет

$$P(t) = \int\limits_{E_t} e^{\delta\tau} U\,[\lambda(\tau)\varphi(\tau),\ \varphi(\tau)]\,d\tau. \tag{1}$$

В предположении непрерывного роста органического строения капитала (новых фондов) структура множества E_t такова: пусть к моменту времени t высвобождаются все фонды, созданные до некоторого момента времени $m(t)$; тогда E_t представляет собой отрезок $[m(t), t]$. Функция $m(t)$ в модели подлежит определению.

Капиталовложения, идущие на увеличение основных и оборотных фондов, задаются через их интенсивность так, что $\varkappa(t)\,dt$ — объем капиталовложений во временном интервале $[t, t+dt]$. Функции $\varkappa(t)$ и $T(t)$ являются в модели заданными, впрочем $\varkappa(t)$ может быть и поставлена в зависимость от $P(t)$ или других параметров модели.

Составим уравнения, описывающие модель.

Уравнение баланса по труду. Дополнительная потребность в труде $\varphi(t)\,dt$ в момент времени t удовлетворяется за счет прироста трудовых ресурсов и частично за счет высвободившихся единиц труда со списанных фондов. Получаем равенство

$$\varphi(t)\,dt = T'(t)\,dt + \varphi[m(t)]m'(t)\,dt. \tag{2}$$

Уравнение баланса по фондам. Объем вновь создаваемых фондов за время dt равен $\lambda(t)\varphi(t)\,dt$, они создаются за счет средств для капиталовложений, отсюда

$$\lambda(t)\varphi(t) = \varkappa(t). \tag{3}$$

Условие дифференциальной оптимизации. Это условие означает, что прирост чистой продукции в каждый момент времени должен быть максимальным (другим возможным критерием оптимальности может быть максимизация произведенной чистой продукции за некоторый плановый период $[t_0, t_1]$ или другое условие глобальной оптимизации). Другими словами, функции $\lambda(t)$, $\varphi(t)$ и $m(t)$ должны быть определены так, чтобы функция $dP(t)\,/\,dt$ была максимальной в каждый момент времени t. Рассматривая $dP(t)\,/\,dt$ как функцию указанных переменных и учитывая связи (2) и (3), условие дифференциальной оптимизации получаем в виде

$$\varphi(t)U\,[\lambda(t),\ 1] - \varkappa(t)U_x'\,[\lambda(t),\ 1] - e^{\delta[m(t)-t]}\varphi(t)U\,[\lambda\,[m(t)],1] = 0. \tag{4}$$

Таким образом, система уравнений, описывающих модель, есть (2) — (4). Система решается для $t > t_0$ (t_0 — фиксированное число). Начальные условия задаются в виде

$$m(t_0) = m_0, \quad \varphi(t) = \varphi_0(t), \quad \lambda(t) = \lambda_0(t) \quad \text{при } t \in [m_0, t_0],$$

где m_0 — заданное число, а $\varphi_0(t)$ и $\lambda_0(t)$ — функции, задающие начальное распределение (при $t \in [m_0, t_0]$) фондов и труда.

Случай отсутствия внешних капиталовложений. Пусть $V(t)$ — часть чистой продукции, идущая на потребление, а остальная часть идет на создание основных фондов. Уравнение (3) принимает вид

$$\lambda(t)\varphi(t) = P(t) - V(t).$$

Обычно потребление принимается равным фиксированной доле чистой продукции:

$$V(t) = (1-\gamma)P(t)$$

($0 < \gamma < 1$ — заданное число).

Учет периода создания фондов — лага. Примем теперь, что выделенные капиталовложения не сразу превращаются в фонды, т. е. учитывается время строительства и освоения фондов. Принимаем срок строительства и освоения фондов равным L. Моральное устаревание фондов за время строительства и освоения учитывается следующим образом: фонды, начавшие работать в момент t, имеют структуру $\lambda(t)$ и уровень технического прогресса, характеризуемый множителем $e^{\delta(t-L)}$. По той же причине объем вступивших в производство фондов (на интервале $[t, t+dt]$), определяется интенсивностью капиталовложений в момент $t-L$ и равен $\varkappa(t-L)\,dt$.

Уравнения модели в этом случае принимают вид

$$P(t)=\int\limits_{m(t)}^{t} e^{\delta(\tau-L)}\,U[\lambda(\tau),1]\,\varphi(\tau)d\tau, \tag{1a}$$

$$\varphi(t)=T'(t)+\varphi[m(t)]m'(t), \tag{2a}$$

$$\lambda(t)\varphi(t)=\varkappa(t-L), \tag{3a}$$

$$\varphi(t)\,U[\lambda(t),1]-\varkappa(t-L)\,U_x'[\lambda(t),1]-e^{\delta[m(t)-t]}\varphi(t)\,U[\lambda[m(t)],1]=0. \tag{4a}$$

Норма эффективности капиталовложений (в дальнейшем будем обозначать этот параметр через $n(t)$) определяется приростом (в единицу времени) произведенной продукции, отнесенной к вызвавшим его дополнительным капиталовложениям ([2]).

В исследуемой модели рассмотрим следующий экономический маневр. Пусть в течение весьма малого промежутка времени dt мы получаем дополнительные средства в размере $d\varkappa$, которые должны вернуть через некоторое время Δt. Используем дополнительные капитальные средства для создания за время dt фондов более высокой структуры ($\lambda(t+\Delta t)$ вместо запланированной структуры $\lambda(t)$), что даст накопление дополнительной продукции. Далее за время $[t+\Delta t,\ t+\Delta t+dt]$ создаются фонды структуры $\lambda(t)$, что позволит вернуть ранее дополнительно вложенные средства. В результате описанного процесса к моменту $t+\Delta t+dt$ мы будем иметь спектр структуры фондов и объем капиталовложений, практически совпадающий с получающимся при развитии экономики без дополнительных капиталовложений. Вычисляя эффективный прирост чистой продукции по отношению к дополнительным капиталовложениям (в единицу времени), получим формулу для расчета нормы эффективности

$$n(t)=e^{\delta t}U_x'[\lambda(t),1],$$

или, пользуясь уравнением (4),

$$n(t)=\frac{1}{\varkappa(t)}\left\{\frac{dP(t)}{dt}-e^{\delta m(t)}\,U[\lambda[m(t)],1]\,T'(t)\right\}. \tag{5}$$

Иначе говоря, $n(t)$ определяется отношением прироста национального дохода, из которого вычтена величина возможного чистого дохода от вновь вступивших единиц труда, при работе их на списываемых фондах (структуры $m(t)$), к величине вступивших в течение временного интервала фондов.

Используя (5), получаем соотношение $dP/dt=\varkappa(t)n(t)+T'(t)Э_т$, из которого видно, что прирост национального дохода определяется суммой вновь вводимых фондов, умноженных на их эффективность, и добавленного труда, умноженного на его предельную эффективность $Э_т$ (эффективность на высвобожденных фондах).

Решение уравнений модели методом малого параметра. В этом пункте зададимся конкретным видом функций $U(x,y)$, $T(t)$ и $\varkappa(t)$. Производственная функция имеет вид $U(x,y)=x^{\alpha}y^{1+\alpha}$ — функция Кобба — Дугласа. Ресурсы труда растут экспоненциально $T(t)=e^{pt}$, p — демографическая норма роста. Плотность капиталовложений принимаем постоянной, $\varkappa(t)=\varkappa$, $\varkappa$ — заданное положительное число.

Будем считать, что величины p и δ (δ — показатель технического прогресса) малы, что согласуется со статистическими данными. Предположим, что система уравнений (2) – (4) имеет решение и функции $\lambda(t)$, $\varphi(t)$ и

$m(t)$ можно разложить в ряд по степеням p и δ:

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(t) + p\lambda_p(t) + \delta\lambda_\delta(t) + p^2\lambda_{p^2}(t) + p\delta\lambda_{p\delta}(t) + \delta^2\lambda_{\delta^2}(t) + \ldots,$$
$$\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) + p\varphi_p(t) + \delta\varphi_\delta(t) + p^2\varphi_{p^2}(t) + p\delta\varphi_{p\delta}(t) + \delta^2\varphi_{\delta^2}(t) + \ldots,$$
$$m(t) = \bar{m}(t) + pm_p(t) + \delta m_\delta(t) + p^2m_{p^2}(t) + p\delta m_{p\delta}(t) + \delta^2 m_{\delta^2}(t) + \ldots$$

Подставляем эти ряды в систему (2) — (4), приравниваем члены с одинаковым порядком малости (членами порядка малости выше первой относительно p и δ пренебрегаем) и, решая получающиеся уравнения, определяем функции $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{m}(t)$, $\lambda_p(t)$, $\varphi_p(t)$, $m_p(t)$, $\lambda_\delta(t)$, $\varphi_\delta(t)$, $m_\delta(t)$.

Решение системы (2) — (4) при наличии сделанных в этом пункте предположений выглядит так:

$$\lambda(t) = \frac{\varkappa t}{\beta}\left\{1 - \delta\frac{t-t_0}{2\alpha} - p\frac{t-t_0}{\beta(1-\beta)}\right\},$$
$$\varphi(t) = \frac{\beta}{t}\left\{1 + \delta\frac{t-t_0}{2\alpha} + p\frac{t-t_0}{\beta(1-\beta)}\right\},$$
$$m(t) = \beta t\left\{1 + \delta\frac{(1-\beta)t}{2\alpha}\right\},$$

где $\beta = (1-\alpha)^{1/\alpha}$.

Используя полученное решение, получим для нормы эффективности капиталовложений следующее выражение:

$$n(t) = Mt^{\alpha-1}\{1 + \delta[at^\alpha + b(t-t_0)] + p[c(t-t_0)]\},$$

где

$$M = \frac{\alpha\varkappa^{1-\alpha}}{\beta^{1-\alpha}}, \quad a = \frac{\varkappa^{1-\alpha}}{\beta^{1-\alpha}}, \quad b = \frac{1-\alpha}{2\alpha}, \quad c = \frac{1-\alpha}{\beta(1-\beta)}.$$

Институт управления народным хозяйством
Москва

Поступило
4 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Л. И. Горьков, ДАН, 129, № 4 (1959). [2] Л. В. Канторович, Альб. Л. Вайнштейн, Экономика и матем. методы, 3, в. 5 (1967).