Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 2

УДК 517.917 *МАТЕМАТИКА*

Н. К. ГАВРИЛОВ

ОБ n-МЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ С НЕГРУБОЙ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 I 1973)

Настоящая работа связана с рассмотрением систем, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, т. е. такой двоякоасимптотической траекторией к грубому периодическому движению седлового типа, по которой устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения касаются друг друга. В ([1, 5]) рассмотрена такая задача в случае, когда динамическая система задана на трехмерном многообразии. Здесь мы приводим результаты для n-мерного случая.

Рассмотрим динамическую систему $(X_\mu M^n)$, где X_μ — векторное поле класса C^k, $k \geqslant 2$, непрерывно зависящее от параметра μ, а M^n — компактное n-мерное многообразие класса C^∞. Пусть система (X_μ, M^n) имеет при достаточно малых μ грубое периодическое движение седлового типа, имеющее при $\mu = 0$ гомоклиническую кривую Γ_0. Обозначим через $\mathfrak{M}_\mu^+$ и $\mathfrak{M}_\mu^-$ соответственно устойчивое и неустойчивое многообразие периодического движения L_μ. Предположим, что

$$\dim(W_M^+ \cap W_M^-) > 1, \tag{1}$$

где W_M^+ и W_M^- — касательные пространства к $\mathfrak{M}_0^+$ и $\mathfrak{M}_0^-$ в точке $M \in \Gamma_0$. Условие (1) означает, что пересечение $\mathfrak{M}_0^+$ с $\mathfrak{M}_0^-$ по Γ_0 является негрубым. Будем предполагать, что оно является простейшим негрубым, т. е. $\mathfrak{M}_0^+$ и $\mathfrak{M}_0^-$ имеют по Γ_0 касание первого порядка.

Зафиксируем некоторую достаточно малую окрестность U множества $\Gamma_0 \cup L_0$ и обозначим через N множество траекторий, остающихся в U при всех t. Задача состоит в исследовании следующих вопросов:

1) Как описать множество N при фиксированном μ?

2) В каких случаях бифуркационная поверхность H^1, соответствующая системам с негрубой гомоклинической кривой, может отделять системы Морса — Смейла от систем со счетным числом периодических движений?

3) Как меняется множество N при изменении параметра μ?

Исследование свойств N сводится к изучению отображения T: $S \to S$ некоторой локальной секущей S к периодическому движению L_μ.

Отображение T строится в виде произведения двух отображений T_0 и T_1, где T_0 строится в окрестности L_μ, а T_1 — в окрестности глобального куска Γ_0.

В некоторых локальных координатах на S отображение T_0 будет иметь вид

$$\bar{x} = A(\mu)x + f(x, y, \mu)x,$$
$$\bar{y} = B(\mu)y + g(x, y, \mu)y,$$
$$x = \{x_1, \ldots, x_l\};\; y = \{y_1, \ldots, y_m\},\; m + l = n - 1,$$

A — l-мерная матрица, характеристические корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ которой лежат внутри единичной окружности, B — m-мерная матрица, характеристические корни $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ которой лежат вне единичной окружности, а f и

g — вектор-функции, обращающиеся в нуль при $x = y = 0$. Неподвижная точка $O(0, 0)$ соответствует периодическому движению L_μ. Уравнение следа $\mathfrak{M}^- \cap S$, проходящего через точку O: $x = 0$, уравнение $\mathfrak{M}^+ \cap S$: $y = 0$.

Пусть $|\gamma_1| = \min |\gamma_i|$, $|\lambda_1| = \max |\lambda_j|$. Будем предполагать, что отображение T_0 удовлетворяет следующим условиям:

А) $|\lambda_1| \cdot |\gamma_1| < 1$ *;

Б) $|\gamma_1| < |\gamma_j|$; 1) $j = 2, \ldots, m$, если корень γ_1 — действительный, 2) $j = 3, \ldots, m$, если $\gamma_1 = \rho e^{i\varphi}$, $\gamma_2 = \rho e^{-i\varphi}$, $\varphi \neq 0, \pi$.

При этом условии у отображения T_0 в неустойчивом многообразии $x = 0$ существует неведущее подмногообразие π, уравнение которого можно привести [2] к виду: 1) $y_1 = 0$, 2) $y_1 = y_2 = 0$. Все точки неустойчивого многообразия, не лежащие на π, стремятся к неподвижной точке O при $k \to -\infty$ так, что: 1) $y_i^k / y_1^k \to 0$, $i = 2, \ldots, m$; 2) $y_i^k / (|y_1^k| + |y_2^k|) \to 0$, $i = 3, \ldots, m$.

Пусть $M^+(x^+, 0)$ и $M^-(0, y^-)$ — точки пересечения Γ_0 с S. Предполагается, что выполнено условие

В1) $y_1^- > 0$, В2) $|y_1^{-1}| + |y_2^-| \neq 0$, т. е. точки пересечения Γ_0 с S не принадлежат неведущему подмногообразию π.

Отображение T_1: $S \to S$ по траекториям, близким к глобальному куску Γ_0, в координатах x, y будет иметь вид

$$\bar{x} - x^+ = F(x, y - y^-, \mu), \quad \bar{y} = G(x, y - y^-, \mu),$$

где функции F и G определены при всех достаточно малых μ в некоторой фиксированной окрестности точки M^- и $F(0, 0, 0) = G(0) = 0$. В силу условия (1)

$$\det \left.\frac{DG}{Dy}\right|_0 = 0. \tag{2}$$

Пересечение $\mathfrak{M}_0^+$ с $\mathfrak{M}_0^-$ по Γ_0 будет простейшим негрубым, если отображение $R^m \to R^m$

$$\bar{y} = G(0, y - y^-, 0)$$

имеет в $y = y^-$ особенность коразмерности 1. Из [3] следует, что эта особенность принадлежит классу Σ^{10} типа уитнеевской складки. Поэтому

$$\operatorname{rang} \left.\frac{DG}{Dy}\right|_0 = m - 1; \tag{3}$$

поверхность $\Delta(y) \equiv \det \frac{DG}{Dy} = 0$ не имеет особенности в $y = y^-$, т. е.

$$\operatorname{grad} \Delta(y)|_0 \neq 0; \tag{4}$$

$$\operatorname{grad} \Delta\Big|_0 \cdot \ker \left.\frac{DG}{Dy}\right|_0 \neq 0. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы условия (3)—(5) простейшего касания в нашем случае имели следующий вид:

Г) $c_1 = \det \left.\frac{DG_j}{Dy_i}\right|_0 \neq 0, \quad i, j = 2, \ldots, m;$

Д) $\frac{\partial}{\partial y_1} \Delta(y)|_0 \neq 0;$

Е) $d = \operatorname{grad} \Delta\Big|_0 \cdot \ker \left.\frac{DG}{Dy}\right|_0 \neq 0.$

В силу Д) поверхность $\Delta(y) = 0$ может быть записана в виде

$$y_1 - y^- = \Phi(y_2, \ldots, y_m).$$

Ядро $\left.\frac{DG}{Dy}\right|_0$ в силу Г) имеет вид $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, где $c_1 \neq 0$. Условия Г)—Е) означают, что неустойчивое многообразие $x = 0$ при отображении T_1 складывается в точке M^- вдоль поверхности Φ по ведущей координате

* Случай $|\lambda_1| \cdot |\gamma_1| > 1$ сводится к рассматриваемому заменой t на $-t$.

y_1. При этом неустойчивое многообразие $x=0$ может складываться и по другим направлениям, но при условиях Г)—Е) складывание поверхности $x=0$ по ведущей координате будет обязательно.

В силу условия Г) уравнения

$$G_j(x, y, \mu) = 0, \qquad j = 2, \ldots, m,$$

можно разрешить относительно y_j, $j = 2, \ldots, m$:

$$y_j = \varphi_j(x, y_1, \mu), \quad \varphi_j(0, y_1^-, 0) = y_j^-.$$

Подставляя эти соотношения в функцию G_1, получим

$$G_1(x, \varphi_j(x, y_1, \mu), \mu) \equiv \bar{G}(x, y_1, \mu).$$

В силу условия (2) $\bar{G}_{y_1}(0, y_1^-, 0) = 0$, а в силу условия Е) $\bar{G}_{y_1^2}(0, y_1^-, 0) = d / c_1^2 \neq 0$. Поэтому уравнение $\bar{G}_{y_1}(x, y_1, \mu) = 0$ можно разрешить относительно $y_1 - y_1^-$:

$$y_1 - y_1^- = \psi(x, \mu), \quad \psi(0, 0) = 0.$$

Тогда функцию $\bar{G}(x, y_1, \mu)$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{G}(x, y_1, \mu) \equiv E(\mu) + C(x, y_1, \mu) + D(x, y_1, \mu)(y_1 - y^- - \psi(x, \mu))^2,$$

где $E(\mu) = \bar{G}(0, \psi(0, \mu), \mu)$, $E(0) = 0$, $C(0, y_1, \mu) \equiv 0$ и $2D(0, y_1^-, 0) = d / c_1^2$.

Обозначим $c = \left.\dfrac{\partial C}{\partial x_1}\right|_0$.

Из построения T_0 и T_1 следует, что существует такая окрестность $U(L_0 \cup \Gamma_0)$, гомеоморфная внутренности тора с приклеенной ручкой, в которой L_0 лежит внутри тора, а внутри ручки — глобальный кусок Γ_0.

Точки пересечения гомоклинических кривых с S, обходящих ручку только один раз, находятся из уравнений

$$E(\mu) + D(0, y_1, \mu)(y_1 - y^- - \psi(0, \mu))^2 = 0,$$

$$y_j = \varphi(0, y_1, \mu), \quad j = 2, \ldots, m.$$

Ясно, что если $Ed > 0$, то система не имеет в U гомоклинических кривых, обходящих ручку только один раз, а при $Ed < 0$ в U есть две грубых гомоклинических кривых, обходящих ручку только один раз. Если $E(\mu) = 0$, то система имеет гомоклиническую кривую Γ_μ с тем же характером касания $\mathfrak{M}_\mu^+$ и $\mathfrak{M}_\mu^-$ по Γ_μ, что и система с $\mu = 0$. Множество таких систем образует бифуркационную пленку H^1 коразмерности 1.

Рассмотрим множество бесконечных в обе стороны последовательностей

$$(\ldots j_i^{\alpha_i}, j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, \ldots), \tag{*}$$

составленных из символов $j_i^{\alpha_i}$, где j_i — целые числа, большие $\bar{k}$, а $\alpha_i = 1, 2$, удовлетворяющих следующему условию: для любых соседних символов в последовательности (*) выполняется неравенство:

1) $d[\nu_1\gamma^{-j_{i+1}} - c|\lambda_1|^{j_i} - E(\mu)] \geqslant 0$, если γ_1 действительное;

2) $d[\nu_1\rho^{-j_{i+1}}\cos(\varphi j_{i+1} + \theta) - c\nu_2|\lambda_1|^{j_i} - E(\mu)] \geqslant 0$, если γ_1 комплексное, где ν_1, ν_2, θ — некоторые положительные постоянные. Обозначим это множество через Ω'. За исключением случая $\gamma_1 > 0$, $E \leqslant 0$, $d < 0$, множество Ω' имеет мощность континуума и в нем всюду плотны периодические последовательности.

Методом, аналогичным методу доказательства работ ([1], [5]), доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *В любой окрестности* $U(\Gamma_0 \cup L_0)$ *система* (X_μ, M^n), *удовлетворяющая условиям* А) — Е), *имеет при достаточно малых* μ *подмно-*

жество $N' \subset N$, траектории которого имеют седловой тип (за исключением Γ_μ при $E(\mu)=0$) и находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством Ω'.

Теорема 2. *Существует такая окрестность $U(L_0 \cup \Gamma_0)$, что при $\gamma_1 > 0$, $d < 0$ и достаточно малых μ множество*

$$N = \begin{cases} L_\mu & \text{при } E(\mu) < 0, \\ L_\mu \cup \Gamma_\mu & \text{при } E(\mu) = 0. \end{cases}$$

Следствие 1. *При $\gamma_1 > 0$, $d < 0$ бифуркационная пленка H^1 Ω-достижима со стороны систем Морса — Смейла, т.е. при выходе на H^1 со стороны систем Морса — Смейла множество траекторий, лежащих целиком в U, не меняется* (определение достижимости дано в ([1], [5])).

Таким образом, эта теорема выделяет тот случай, когда бифуркационная пленка H^1 может отделять системы Морса — Смейла от систем со счетным множеством периодических движений. Переход через эту пленку сопровождается Ω-взрывом, счетное число периодических движений возникает сразу.

Теорема 3. *Существует такая окрестность $U(L_0 \cup \Gamma_0)$, что при $\gamma_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $c < 0$, $d > 0$, $E < 0$ множество N находится во взаимно однозначном соответствии с топологической схемой Бернулли из трех символов.*

Следствие 2. *При $\gamma_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $c < 0$, $d > 0$ бифуркационная пленка H^1 Ω-достижима со стороны систем с двумя грубыми однообходными гомоклиническими кривыми.*

Во всех остальных случаях появление негрубой гомоклинической кривой является бифуркацией в классе систем со счетным множеством периодических движений и пленка H^1 недостижима с двух сторон. При непрерывном подходе к H^1 происходит счетное множество бифуркаций, связанных с рождением или исчезновением периодических движений, счетное множество бифуркаций, связанных с появлением негрубых многообходных гомоклинических кривых и континуального множества бифуркаций, связанных с нарушением трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий. В частности, если система удовлетворяет условиям А) — Е) и корень γ_1 комплексный (этого случая нет на M^3), то бифуркационная пленка H^1 всегда недостижима. В этом случае существуют весьма интересные аналоги с задачей о структуре окрестности двоякоасимптотической траектории к состоянию равновесия типа седло — фокус ([4]).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
10 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников, Матем. сборн., 88, 4 (1972). [2] Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1970. [3] В. И. Арнольд, УМН, 23, № 1 (139), 3 (1968). [4] Л. П. Шильников, Матем. сборн., 81 (123), № 1 (1970). [5] Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников, Матем. сборн., 90 (132), № 1 (1973).