Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 6

УДК 511.2+519.21 *МАТЕМАТИКА*

Н. Н. ЛЯШЕНКО

О МОДЕЛИРОВАНИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СУММАМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XII 1972)

Условные обозначения: Z^+ — множество натуральных чисел, Ω_n — множество $\{1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{A}_n$ — множество всех подмножеств Ω_n, $N_n(A)$ — количество элементов множества $\Omega_n \cap A$, $\nu_n(A) = \frac{1}{n} N_n(A)$, p — простые числа, $\gamma_p = \left[\frac{\ln r}{\ln p}\right]$, $\alpha_p(m)$ — показатель, с которым простое число p входит в разложение m, $\beta_p(m) = \min\{\alpha_p(m), \gamma_p\}$, $w(t)$ — процесс Винера, к.м.р.— конечномерные распределения.

В настоящей заметке излагается ряд результатов, связанных с моделированием броуновского движения при помощи конструкции, использованной в ([1]) (см. также ([2]), гл. X). В отличие от названных работ при построении процессов использованы не характеры, а некоторый класс мультипликативных функций, описанный ниже. Основная трудность состояла в получении аналогов известного неравенства А. Вейля, доказанного им для характеров.

Пусть $\psi^{(k)}$ — функции натурального аргумента, принимающие значения ± 1.

$$U_n(m, t) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \sum_{k \leqslant t h_n} \psi^{(n)}(m+k),$$

$$L_n(m, s, t) = U_n(m, t) - U_n(m, s),$$

где h_n — возрастающая последовательность натуральных чисел, $m \in \Omega_n$, s и t — вещественные числа, $0 \leqslant s < t$.

Введем вероятностные пространства $F_n = \{\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \nu_n\}$. Функции $\psi^{(n)}$ — случайные величины на F_n, U_n — случайные процессы, а L_n — их приращения.

Положим

$$\Phi_{k_1, \ldots, k_\gamma}(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \prod_{j=1}^{\gamma} \psi^{(n)}(m + k_j); \quad \gamma, k_j \in Z^+,$$

$$T_{\gamma, n} = \sup_{\substack{k_1, \ldots, k_\gamma \\ k_i \in (s h_n, t h_n] \\ k_i \neq k_j, i \neq j}} |\Phi_{k_1, \ldots, k_\gamma}(n)|, \quad R_{\gamma, n} = \sup_{l \leqslant \gamma} T_{l, n}.$$

Будем говорить, что выполняется условие (1) (или $\psi^{(n)}$ обладают свойством (1)), если для всякого фиксированного γ $T_{\gamma, n} \to 0$ при $n \to \infty$, и выполняется условие (2), если $h_n = o(R_n^{-\gamma}$.

Положим, кроме того, $\psi_{v, r}(m)$ равной $\prod_{< p \leqslant r} \psi(p)$, если ψ сильно мультипликативна, и $\prod_{\substack{p \mid m \\ v < p \leqslant r}} \psi(p^{\beta_p(m)})$, если ψ вполне мультипликативна; $\psi_r = \psi_{1, r}$.

Теорема 1. *При выполнении условий* (1) *и* (2) *к. м. р.* $U_n(t)$ *сходятся к к.м.р.* $w(t)$.

Теорема 2. $r = r(n) \to \infty$, $v = v(n) \to \infty$, $h = h(n) \to \infty$, $h < v < r$, $\ln r = o(\ln n)$; *тогда свойство* (1) *функций* $\psi_{v,r}$ *эквивалентно условию*

$$\sum_{\substack{v<p\leqslant r\\ \psi(p)=-1}} \frac{1}{p} \to \infty.$$

Обозначим $\mathfrak{G}_u = \sum\limits_{\substack{p\leqslant u\\ \psi(p)=-1}} \frac{1}{p}$, $\mathfrak{W}_x = \sup\{u \mid \mathfrak{G}_u \leqslant x\}$.

Теорема 3. *В предположениях теоремы* 2 *верны утверждения*:

а) *из свойства* (1) *следует* $\sum\limits_{p:\,\psi(p)=-1} \frac{1}{p} = \infty$,

б) *если* $\sum\limits_{p:\,\psi(p)=-1} \frac{1}{p} = \infty$, *то при выборе* $h < v = \mathfrak{W}_{y_n}$, *где* $y_n \leqslant a\mathfrak{G}_r$, $0 < a < 1$, *имеет место* (1) *и*

$$T_{\gamma,n} \leqslant c_1(\gamma)\, e^{-(1-a)\mathfrak{G}} + c_2(\gamma)\, e^{-c \ln n/\ln r}.$$

Если при этом $\ln h = o\left(\frac{\ln n}{\ln r}\right)$, *то к.м.р.* $U_n(t)$ *сходятся к к.м.р.* $w(t)$.

Теорема 4. *Существует постоянная* c_0 *такая, что при* $h < c_0 \ln n/\ln r$ *утверждения теорем* 2 *и* 3 *верны для* ψ_r.

Доказательство теорем 2—4 заключается в том, что $\Phi_{k_1,\ldots,k_\gamma}(n)$ есть значение характеристической функции величины $\sum\limits_{j=1}^{\gamma} \varepsilon^{(n)}(m+k_j)$ в точке π, где $\varepsilon^{(n)}$ аддитивна и обладает свойством $\psi_{(m)}^{(n)} = (-1)^{\varepsilon_{(m)}^{(n)}}$.

С помощью методов, изложенных в книге И. П. Кубилюса [3], а также результатов Р. В. Уждавиниса [4] оценку характеристической функции нетрудно получить, изучая характеристическую функцию суммы независимых случайных величин, распределения которых известны.

Теорема 5. *Пусть* $Z_n(m, t)$ — *ломаные, построенные по точкам разрыва траекторий* $U_n(m, t)$. *Тогда к.м.р.* $Z_n(m, t)$ *и* $U_n(m, t)$ *сходятся к к.м.р.* $w(t)$ *одновременно, причем в условиях теорем* 2—4 *имеет место слабая сходимость мер, порожденных процессами* $Z_n(m, t)$, *к мере, порожденной* $w(t)$, *в пространствах* $C[a, b]$.

Из условий (1) и (2) следует, что $E|Z_n(m, t) - Z_n(m, s)|^{2k} \leqslant H_k(t-s)^k$ для всякого $k \in Z^+$, а отсюда — слабая сходимость мер (см. [5], стр. 583).

В заключение автор выражает благодарность акад. И. П. Кубилюсу за проверку работы и ценные советы и проф. И. А. Ибрагимову за руководство и помощь в работе, а также с глубокой признательностью вспоминает ценные советы и интересные замечания акад. Ю. В. Линника.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
28 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Кубилюс, Ю. В. Линник, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 6 (13), 88 (1959). [2] Ю. В. Линник, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967. [3] И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962. [4] Р. В. Уждавинис, Тр. АН ЛитССР, сер. Б, № 2 (1959). [5] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», 1965.