Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. А. ВИННИК, Д. М. ЭЙДУС

ОБ УСЛОВИЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ГРАНИЦАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 III 1973)

Рассматривается краевая задача для уравнения

$$\Delta u+\lambda^2 u+f=0 \tag{1}$$

в неограниченной области Ω n-мерного эвклидова пространства E_n при условии на границе $\partial\Omega$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где λ — положительная постоянная, $f\equiv f(x)$ — функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности. Известно, что если область $E_n\setminus\Omega$ ограничена (в этом случае будем называть границу $\partial\Omega$ конечной), то краевая задача (1), (2) однозначно разрешима в классе функций, удовлетворяющих на бесконечности условию излучения Зоммерфельда. Это условие, записанное в форме Реллиха ([1]), имеет вид

$$\varliminf_{r_0\to\infty} \int\limits_{S(r_0)} |u_r-i\lambda u|^2\,dS=0, \tag{3}$$

где $r=|x|$, $u_r=\partial u/\partial r$, $S(r_0)=\Omega\cap S_1(r_0)$; здесь $S_1(r_0)$ — сфера $r=r_0$. Соответствующее решение задачи (1), (2) может быть получено с помощью принципа предельного поглощения, т. е. как предел $R_z f$ при $z\to\lambda^2+i0$, где R_z — резольвента оператора $l\equiv-\Delta$, заданного на функциях, удовлетворяющих условию 2, и рассматриваемого в пространстве $L_2(\Omega)$ (см., например, ([2])).

В случае конечной границы в работах ([3, 4]) использовалась следующая форма условия излучения:

$$\int\limits_{\Omega} (1+r)^{-1}|u_r-i\lambda u|^2\,dx<\infty. \tag{4}$$

Из результатов работ ([2, 3]) следует, что если $f=O(r^{-n-\varepsilon})$ при $r\to\infty$, то задача (1), (2), (4) однозначно разрешима и ее решение совпадает с решением задачи (1), (2), (3). Физический смысл условий (3) и (4) совпадает с физическим смыслом классического условия излучения Зоммерфельда ([5]). Каждое из условий (3), (4) будем называть условием типа Зоммерфельда.

Перейдем к рассмотрению областей с бесконечными границами. Для некоторых областей, допускающих разделение переменных (конус, параболоид), условия типа Зоммерфельда обеспечивают однозначную разрешимость задачи (1), (2). Однако эти условия не являются универсальными. Так, в случае цилиндра с ограниченным поперечным сечением условия излучения имеют принципиально иной вид ([6]).

Известны некоторые классы областей, для которых условия типа Зоммерфельда гарантируют единственность решения краевой задачи ([1, 7, 8]). В настоящей заметке доказывается, что если область удовлетворяет условиям, введенным в ([8]) и сформулированным ниже, то принцип предельного поглощения приводит к решению задачи (1), (2), (4). Тем самым эта задача однозначно разрешима. При более жестких ограничениях на Ω, f решение оказывается совпадающим с решением задачи (1), (2), (3).

Пусть $E_n(r_0)$ — шар $r<r_0$, $E_n'(r_0)$ — область $r>r_0$,

$$\Omega(r_0)=\Omega\cap E_n(r_0), \quad \Omega'(r_0)=\Omega\cap E_n'(r_0),$$

$$\partial\Omega(r_0)=\partial\Omega\cap E_n(r_0), \quad \partial\Omega'(r_0)=\partial\Omega\cap E_n'(r_0).$$

Введем класс $\mathcal{N}$ областей Ω, удовлетворяющих следующим условиям:

1) При любом $r_0>0$ множество $\partial\Omega(r_0)$ является $(n-1)$-мерной поверхностью Ляпунова в E_n.

2) В E_n существует такая система координат $x_1, \ldots, x_n$ и такие числа $r_1>0$, $\varkappa\geqslant 1$, что для всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\partial\Omega'(r_1)$ имеет место неравенство $(q, \nu)\leqslant 0$, где ν — вектор внешней нормали в точке x, q — вектор с координатами $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varkappa x_n)$.

3) Если $\varkappa>1$, то существуют такие постоянные $c_0>0$, $\varkappa_1>1$, что для всех точек $x\in\Omega'(r_1)$ имеет место неравенство $x_n\geqslant c_0R^{\varkappa_1}$, где $R=(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{1/2}$.

В дальнейшем систему координат будем считать выбранной в соответствии с условием 2.

З а м е ч а н и е. Вектор q направлен по касательной к кривой, проходящей через точку x и определяемой уравнениями вида

$$x_k=\tau_k t, \ k=1, 2, \ldots, n-1, \quad x_n=\tau_n t^{\varkappa}, \tag{5}$$

где t — параметр, $t\geqslant 0$, τ_k — постоянные. Тем самым условие 2 означает, что вся поверхность $\partial\Omega'(r_1)$ освещается семейством (5) парабол степени $\varkappa$.

Из результатов работы [7] вытекает, что если $\Omega\in\mathcal{N}$, $\varkappa=1$, то решение задачи (1), (2) единственно в каждом из классов функций, определяемых условиями (3) и (4). Аналогичное утверждение при $\varkappa>1$ следует из результатов, полученных в [8] с помощью методики работ [2, 9]. Отметим, что условие 2 наложено не на всю границу $\partial\Omega$, а на ее часть $\partial\Omega'(r_1)$. Поэтому единственность решения не следует из теоремы единственности Реллиха [1].

Положим $\rho=(\varkappa^{-1}R^2+x_n^2)^{1/2}$. Введем полные пространства функций $L_{2,\alpha}$, $W^1_{2,\beta}$ с нормами, определяемыми с помощью равенств

$$\|f\|^2_{L_{2,\alpha}}=\int\limits_{\Omega}(1+r)^{1+\alpha}|f|^2\,dx,$$

$$\|u\|^2_{W'_{2,\beta}}=\int\limits_{\Omega}(1+r)^{-1-\beta}(|u|^2+|\nabla u|^2)\,dx.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\Omega\in\mathcal{N}$, $f\in L_{2,\alpha}$, $\alpha>0$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{z\to\lambda^2+0i} u_z=u,$$

где $u_z=R_zf$ *и сходимость имеет место в пространстве* $W_{2,\beta}$ *при любом* $\beta>0$. *Предельная функция* u *является решением задачи* (1), (2), (4).

Приведем с х е м у д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть $z=\mu^2+\varepsilon i$. Введем область $M(\mu_0, \mu_1)$ плоскости z, определяемую неравенствами $0<\mu_0<\mu<\mu_1$, $\varepsilon>0$, где μ_0, μ_1 — постоянные. Через c_k будем обозначать постоянные, не зависящие от $z\in M(\mu_0, \mu_1)$. Положим $v=u_z\exp(-i\mu\rho)$.

Функция v удовлетворяет уравнению

$$\Delta v+2i\mu(\nabla\rho, \nabla v)+i\mu v\Delta\rho+\mu^2\varkappa(1-\varkappa)\rho^{-2}R^2v+i\varepsilon v=f\exp(-i\mu\rho) \tag{6}$$

и краевому условию (2).

Пусть $\beta>0$. С помощью (6) получим, что для $z\in M(\mu_0, \mu_1)$ имеет место неравенство

$$\int_\Omega \frac{|v|^2}{(1+\rho)^{1+\beta}}\,dx \leqslant c_1 \int_\Omega \frac{|v_q|^2}{(1+\rho)^{1+\beta}}\,dx + c_2\int_\Omega (1+\rho)^{1-\beta}|f|^2\,dx. \qquad (7)$$

Зафиксируем некоторое число $\gamma\in(0, \alpha]$ следующим образом: возьмем $\gamma<2$ при $\varkappa=1$, $\gamma<\min\{2\varkappa^{-1}, 2(1-\varkappa_1^{-1})\}$ при $\varkappa>1$. Умножим (6) на $i\rho^\gamma\eta(x)\Delta v$, где $\eta(x)$ — гладкая функция, заданная в E_n и такая, что $\eta=0$ при $r\leqslant r_1$, $\eta=1$ при $r\geqslant 2r_1$. Перейдя к вещественным частям, проинтегрируем полученное равенство по области Ω. Используя краевое условие, условия, наложенные на $\partial\Omega$, и включение $v\in W_2^1(\Omega)$, получим, что существуют такие постоянные $r_2>0$, c_3, c_4, что имеет место неравенство

$$\int_\Omega (1-\rho)^{\gamma-2}|\nabla v|^2\,dx \leqslant c_3 \int_{\Omega(r_2)} (|v|^2+|\nabla v|^2)\,dx + c_4\int_\Omega (1+\rho)^{1+\gamma}|f|^2\,dx. \qquad (8)$$

Используя неравенства (7), (8) и применяя основанные на теореме единственности рассуждения статьи ([2]), где доказано аналогичное предложение для случая области с конечной границей, получим утверждение теоремы.

Обозначим через $\mathcal{N}_1$ класс областей $\Omega\in\mathcal{N}$, удовлетворяющих следующему условию: для любых точек $x^{(1)}$, $x^{(2)}\in\partial\Omega$ имеет место неравенство $\theta<cr_{12}$, где θ — угол между внешними нормалями в этих точках, r_{12} — расстояние между точками, c — постоянная. С помощью интегральных оценок функции v доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть* $\Omega\in\mathcal{N}_1$, $f\in L_{2,1}$. *Тогда решение задачи* (1), (2), (4) *удовлетворяет условию* (3).

Тем самым для указанных f, Ω условия (3) и (4) выделяют одно и то же решение краевой задачи.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
12 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Rellich, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 53, № 1 (1943). [2] Д. М. Эйдус, УМН, 24, № 3 (1969). [3] W. Jäger, Mathem. Zs., 102, 62 (1967). [4] Y. Saito, Publications of RIMS, Kyoto Univ., 7, 581 (1971/1972). [5] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1953, стр. 516. [6] А. Г. Свешников, ДАН, 80, № 3 (1951). [7] А. Г. Рамм, ДАН, 152, № 2 (1963). [8] T. Tayoshi, Publications of RIMS, Kyoto Univ., 8, 375 (1972). [9] С. Н. Розе, Матем. сборн., 80 (122), № 2 (1969).