

А. П. ХИСАМУТДИНОВ

ОЦЕНКИ С МИНИМАЛЬНЫМИ АБСОЛЮТНЫМИ МОМЕНТАМИ
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО СУММЫ
РЯДА НЕЙМАНА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 15 I 1973)

1. Вычисление суммы J сходящегося ряда

$$J = \sum_{l=1}^{\infty} \int_R [K^{l-1}f_1](x) \varphi_l(x) dx \quad (1)$$

может быть выполнено методом Монте-Карло осреднением некоторой функции G по траекториям подходящей случайной цепи (см., например, (1)). В (1) R — конечномерное координатное пространство; $f_1(x)$, $\varphi_l(x)$ — действительные функции; K — интегральный оператор с действительным ядром $k(x, x')$. В качестве функции G в (2) был введен «единичный» класс оценок Ξ . Как правило, разные оценки обладают различной эффективностью; поэтому представляет интерес указание оценок, обеспечивающих высокую точность вычислений. Этого особенно требуют такие приложения метода, как вычисление рядов типа (1) с знакопеременными $f_1(\cdot)$, $k(\cdot, \cdot)$, $\varphi_l(\cdot)$ и вычисление по одним траекториям сумм нескольких рядов типа (1); одно возможное применение высокоточных оценок из Ξ указывалось в (3). Ниже при фиксированном распределении случайной цепи из класса Ξ будет выделена оценка с минимальными абсолютными моментами и обсужден ряд следствий.

С задачей вычисления J связаны, как известно, два интегральных уравнения:

$$f(x) = \int_R k(x, x') f(x') dx' + f_1(x), \quad \varphi(x) = \int_R k(x', x) \varphi(x') dx' + \varphi_1(x).$$

Для определенности они будут отнесены к сопряженным банаховым пространствам $L_1(R)$ и $M(R)$ соответственно и будет считаться $\|K\|_{L_1} < 1$; тем самым специфицируется и ряд (1). Для простоты изложения из всех случайных цепей в R , пригодных для вычисления J , ограничимся рассмотрением однородных марковских. Пусть $\omega = x_1, \dots, x_n$ — траектория цепи с плотностью вероятности начального распределения $p_1(x_1)$ и переходной плотностью $p(x', x)$; n — ее случайная длина, E — символ математического ожидания в пространстве траекторий цепи, E_{x_1, \dots, x_l} — символ условного математического ожидания. Обрыв цепи с вероятностью $r(x)$ будет трактоваться как переход в поглощающее состояние a ; полагаем $a = x_{n+1}$. Определим на траекториях цепи функции

$$\xi_l^{(1)} = \begin{cases} q_l \varphi_1(x_l), & \text{если } l \leq n, \\ 0, & \text{если } l > n, \end{cases} \quad l=1, 2, \dots, \quad q_l = f_1(x_l) / p_1(x_l),$$

для $p_1(x_1) > 0$ и $q_l = q_{l-1} k(x_l, x_{l-1}) / p(x_{l-1}, x_l)$ для $p_1(x_1) p(x_1, x_2) \dots p(x_{l-1}, x_l) > 0$ и множество Ψ последовательностей $[\psi_1, \psi_2, \dots]$ функ-

ций, где функции любой последовательности удовлетворяют соотношениям

$$E_{x_1, \dots, x_l} \psi_l = 1 \quad \text{на} \quad \{\omega: \xi_l^{(1)} = 0\}, \quad l=1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$E \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(1)} \psi_i| \right\} < \infty. \quad (3)$$

Класс Ξ образуют оценки вида $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(1)} \psi_i$, где $[\psi_1, \psi_2, \dots] \in \Psi$.

Вследствие (2) для $\forall \xi \in \Xi$ и $\forall l, 1 \leq l < \infty$,

$$E\{\xi_l^{(1)} \psi_l\} = \int_{\mathbb{R}} [K^{l-1} f_l](x) \varphi_l(x) dx;$$

вследствие (2), (3) для $\forall \xi \in \Xi E \xi = J$. Обозначим $\Omega_l = \{\omega: \xi_l^{(1)} \neq 0\}$, $l=1, 2, \dots$

Не умаляя общности, далее предполагается, что вероятность любого множества Ω_l отлична от 0.

2. Представим множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ в виде суммы $F_1 + F_2 + \dots$ попарно

непересекающихся подмножеств, где $F_1 = \Omega_1$, $F_l = \{\omega: \xi_l^{(1)} = \dots = \xi_{l-1}^{(1)} = 0, \xi_l^{(1)} \neq 0\}$, $l=2, 3, \dots$, и введем функцию от траекторий η , полагая ее равной $q_l \varphi(x_l)$ на F_l . В виде леммы 1 сформулируем два простых утверждения о η .

Лемма 1. 1) для $\forall \xi \in \Xi$ $E_{x_1, \dots, x_l} \xi = \eta$ на F_l , $l=1, 2, \dots$

2) $E \eta = J$.

Определим величину t_0 такую, что $t_0 = \sup\{t: E|\xi|^t < \infty, \xi \in \Xi\}$. Поскольку для $\forall \xi \in \Xi$ $E|\xi| < \infty$, то $t_0 \geq 1$.

Лемма 2. Для $\forall \xi \in \Xi$ справедливы неравенства

$$E|\eta|^t \leq E|\xi|^t, \quad \begin{array}{l} 1 \leq t \leq t_0, \quad t_0 < \infty, \\ 1 \leq t < t_0, \quad t_0 = \infty. \end{array}$$

В доказательстве леммы 2 используется свойство неубываемости функций $u(t)|_{x_1, \dots, x_l} = (E_{x_1, \dots, x_l} |\xi|^t)^{1/t}$. Для $t=2$ результат леммы представляет собой известное неравенство Рао — Крамера.

3. Введем уравнение

$$\xi = \eta \quad \text{на} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \quad (4)$$

относительно неизвестной последовательности $[\psi_1, \psi_2, \dots]$ из Ψ . Каждая из функций ψ_l искомой последовательности должна быть определена на соответствующем множестве Ω_l . В силу леммы 2 уравнения (2) — (4) определяют интересующие нас оценки класса Ξ с минимальными абсолютными моментами. Для практических применений наиболее важна, конечно, минимальность моментов низшего порядка и, в особенности, второго. Решение (2) — (4) существует и неединственно за одним исключением, когда является нулем вероятность пересечения любой пары различных Ω_i, Ω_j . Присоединяя к (2) — (4) дополнительные соотношения на функции искомой последовательности и в общем случае вводя условия на переходные плотности, можно выделять отвечающее этим дополнительным условиям решение. Далее рассматривается один такой случай.

4. Пусть $\omega \in \Omega$, $l \geq 1$. Обозначим, если оно существует, $m_l(\omega)$ положительное целое такое, что $l + m_l(\omega)$ ближайшее к l число, что $\xi_{l+m_l(\omega)}^{(1)} \neq$

$\neq 0$; если такого $m_l(\omega)$ не существует, будем полагать $l + m_l(\omega) = n + 1$ и $q_{n+1}\varphi(x_{n+1}) = 0$ и $E_{x_1, \dots, x_{n+1}}G' = G'$, где G' — произвольная функция от траекторий. Всюду ниже для упрощения записи вместо $l + m_l(\omega)$ будем писать $l + m$.

Предложение 1. Пусть выполняются соотношения

$$E_{x_1, \dots, x_l} \psi_l = \psi_l \quad \text{на } \Omega_l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Тогда система уравнений (2)–(5) имеет единственное решение

$$\dot{\psi}_l = [q_l \varphi(x_l) - q_{l+m} \varphi(x_{l+m})] / \xi_{l(4)}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Оценку, сопоставляемую (6), обозначим $\dot{\xi}_l$, а через Ξ обозначим множество оценок, сопоставляемых всевозможным решением (2)–(4). Заметим, что $\dot{\xi}_l$ допускает простое истолкование и построение (см. (4)).

5. Пусть Φ — множество последовательностей $[\varphi_1(x_1, \dots, x_{l+m}), \varphi_2(x_1, \dots, x_{2+m}), \dots]$ функций от траекторий такое, что для каждой последовательности существует постоянная C , что $|\varphi_l(\cdot)| < C$, $l = 1, 2, \dots$

Введем оценку ξ_l , $\xi_l = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_l^{(i)} \bar{\psi}_l$,

$$\bar{\psi}_l = 1 + [E_{x_1, \dots, x_l} \{q_{l+m} \varphi_l(\cdot)\} - q_{l+m} \varphi_l(\cdot)] / \xi_l^{(4)} \quad \text{на } \Omega_l, \quad (7)$$

где $[\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots] \in \Phi$. Справедлива

Л е м м а 3. $\xi_l \in \Xi$ для $\forall [\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots] \in \Phi$.

Назовем функцию $\bar{\varphi}_l(x_1, \dots, x_{l+m})$, $l \geq 1$, любой последовательности из Φ функцией-гипотезой о функции $\varphi(x_{l+m})$. С учетом равенства $E_{x_1, \dots, x_l} \{q_{l+m} \varphi(x_{l+m})\} = q_l [\varphi(x_l) - \varphi_1(x_l)]$ непосредственно из (6), (7) следует, что в соответствующих нормах при стремлениях $\bar{\varphi}_l(x_1, \dots, x_{l+m}) \rightarrow \varphi(x_{l+m})$, $l = 1, 2, \dots$, имеют место стремления $\bar{\psi}_l \rightarrow \psi_l$, $l = 1, 2, \dots$, и $\xi_l \rightarrow \dot{\xi}_l$.

На использование сведений о функции $\varphi(\cdot)$ для уменьшения дисперсии вычислений методом Монте-Карло указывалось уже давно; в какой-то мере наиболее близкий к рассматриваемому здесь способ был описан в (5). В данной работе мы не будем касаться круга вопросов, связанных с выбором плотностей и практической реализацией, а остановимся далее на следующей задаче: сопоставляя заданную оценку с ξ_l , выясним, каким функциям-гипотезам о $\varphi(\cdot)$ она отвечает. В соответствии с близостью их к $\varphi(\cdot)$ можно судить об оптимальности данной оценки.

6. Хорошо известна оценка ξ_l , $\xi_l = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_l^{(i)}$, посредством которой вы-

полнены многие вычисления методом Монте-Карло. Из вида (7) следует

Предложение 2. Оценка ξ_l отвечает множеству Φ_l , $\Phi_l \subset \Phi$, только таких последовательностей, что для каждой из них выполняются равенства

$$q_{l+m} \bar{\varphi}_l(x_1, \dots, x_{l+m}) = C_l(x_1, \dots, x_l) \quad \text{на } \Omega_l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $C_l(\cdot)$ — произвольные конечные функции.

В Φ_l имеются как «хорошие» в каком-либо смысле близости к $\varphi(\cdot)$ последовательности, так и «плохие». Ограничимся далее рассмотрением цепей, для которых $q_l \varphi(x_l) \neq 0$ для $\xi_l^{(1)} \neq 0$. Пусть $m_l(\omega) = 1$ на Ω_l ,

$l = 1, 2, \dots$. Предполагая все $C_l(\cdot) \neq 0$, т. е. исключая из рассмотрения «плохие» последовательности, имеем для $x_{l+1} \neq a$

$$\bar{\varphi}_l(x_1, \dots, x_{l+1})_{x_1, \dots, x_l} \sim \left[\frac{p(x_l, x_{l+1})}{\bar{k}(x_{l+1}, x_l)} \right] \Big|_{x_1, \dots, x_l} \quad \text{на } \Omega_l, \quad l=1, 2, \dots \quad (9)$$

Подобные соотношения для зависимости функций-гипотез от последнего аргумента имеют место и в общем случае произвольного m . Отметим, если $k(x, x')$ — субстохастическое ядро и $p(x', x) = k(x, x')$, то оценка ξ_1 отвечает гипотезам $\bar{\varphi}_l(x_1, \dots, x_{l+m})|_{x_1, \dots, x_l} = C_l(x_1, \dots, x_l)|_{x_1, \dots, x_l}$, или $\bar{\varphi}_l(x_1, \dots, x_{l+m})|_{x_1, \dots, x_l} = \text{const}|_{x_1, \dots, x_l}$. Как следствие предложения 2 получается необходимое условие «минимальности» оценки ξ_1 (см. также (8)).

Предложение 3. Для того чтобы $\xi_1 \in \Xi$, необходимо $r(\cdot) = 0$ на траекториях цепи.

Подобно случаю с ξ_1 любой оценке из Ξ , для которой выполняются соотношения (5), может быть сопоставлена по крайней мере одна последовательность из Φ . Это приводит к пониманию, что любая оценка класса Ξ может быть связана с последовательностью функций-гипотез $\varphi(\cdot)$ и какой-либо оценкой из Ξ , что дает возможность осмыслить и обозреть класс оценок Ξ .

Автор благодарен участникам семинаров отдела теории вероятностей Института математики СО АН СССР и лаборатории теории вероятностей Вычислительного центра ЛГУ за полезные замечания, во многом способствовавшие улучшению изложения. Автор признателен С. М. Ермакову и Г. А. Михайлову, просмотревшим работу в рукописи и сделавшим несколько замечаний.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
5 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. Кертисс, УМН, 12, № 5, 149 (1957). ² А. И. Хисамутдинов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 5, 1269 (1970). ³ С. М. Ермаков, В. С. Нефедов, ДАН, 202, № 1, 27 (1972). ⁴ А. И. Хисамутдинов, Сборн. Вероятностные методы решения задач математической физики, Новосибирск, 1971, стр. 184. ⁵ G. E. Albert, Symp. on Monte Carlo Methods, 1956, p. 37. ⁶ Г. А. Михайлов, Докторская диссертация, Новосибирск, 1971.