

В. В. СЛАВСКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ С ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКТИРОВАНИЕМ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 14 V 1973)

Под r -мерной поверхностью в R^m здесь понимается погружение класса C^m в пространство R^m некоторого r -мерного многообразия M , т. е. пара $\{M, x\}$, где M — дифференцируемое r -мерное многообразие, $x: M \rightarrow R^m$ — отображение класса C^m , регулярное в каждой точке $t \in M$. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}^r$ — r -мерная поверхность в R^m , $p \in \mathcal{P}$ — произвольная ее точка. Обозначим через $x(t^1, t^2, \dots, t^r)$ произвольную параметризацию $\mathcal{P}$, определенную в окрестности точки p . Введем обозначения: $\partial x / \partial t^i = x_i$, $\partial^2 x / \partial t^i \partial t^j = x_{ij}$. Матрица $G = (x_i, x_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, определяет первую, матрица $F(n) = \|(n, x_{ij})\|$ — вторую квадратичную форму поверхности. Здесь n — единичный нормальный вектор к поверхности $\mathcal{P}$ в точке p , множество всех таких векторов обозначим через $S_p^{m-r-1}(\mathcal{P})$, или просто S_p^{m-r-1} . Главные кривизны $k_1(p, n), \dots, k_r(p, n)$ поверхности $\mathcal{P}$ в точке p относительно нормали $n \in S_p^{m-r-1}$ есть корни уравнения

$$\det(F(n) - \lambda G) = 0.$$

Введем некоторые функционалы на r -мерных поверхностях в R^m . Пусть χ — произвольная симметрическая функция r переменных.

Полагаем

$$\chi(p) = \int_{S_p^{m-r-1}} \chi[k_1(p, n), \dots, k_r(p, n)] d\omega_n, \quad \chi(p) = \int_{S_p^{m-r-1}} n\chi[k_i(p, n)] d\omega_n; \quad (1)$$

здесь $d\omega_n$ означает инвариантную меру на сфере S_p^{m-r-1} , нормированную условием $\omega[S_p^{m-r-1}] = 1$.

Далее положим

$$\chi(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \chi(p) ds_p, \quad \chi(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \chi(p) ds_p, \quad (2)$$

где интеграл берется по поверхностной мере ds_p поверхности $\mathcal{P}$. Очевидно, $\chi(\mathcal{P})$ есть скалярная, $\chi(\mathcal{P})$ — векторная характеристика поверхности $\mathcal{P}$.

Обозначим через K_i , $0 \leq i \leq r$, элементарную симметрическую функцию степени i , $K_0 \equiv 1$,

$$K_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r} \mu_{\lambda_1} \mu_{\lambda_2} \dots \mu_{\lambda_r}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

и $\chi = \bar{K}_i$, где

$$\bar{K}_i(\mu_1, \dots, \mu_r) = K_i(|\mu_1|, \dots, |\mu_r|).$$

Целью данной заметки является установление соотношений, связывающих величины $\chi(\mathcal{P})$ и $\chi(\mathcal{P})$ для поверхности $\mathcal{P}$ с аналогичными величинами, относящимися к ее ортогональным проекциям. Мы рассматриваем

здесь два случая: r -мерная поверхность $\mathcal{P}$ проектируется на плоскости размерности $d > r$; поверхность проектируется на плоскости, размерность которых $d \leq r$. В первом случае устанавливаются соотношения следующего вида. Поверхность $\mathcal{P}$ ортогонально проектируется на d -мерную плоскость R_v^d , $d > r$. Проекция представляет собой r -мерную поверхность $\mathcal{P}_v$. Для нее определяются все характеристики вида (2). Интегрируя эти величины по множеству всех d -мерных плоскостей, получаем некоторые функционалы поверхности, явное представление для которых дается теоремой 1.

Приведем точные формулировки. Введем некоторые обозначения. Далее S^{m-1} есть единичная сфера в R^m , $G_{m,l}$ — грассманово многообразие ориентированных l -мерных плоскостей, проходящих через фиксированную точку $O \in R^m$. Многообразия $G_{m,1}$ и $G_{m,m-1}$ естественным образом отождествляются со сферой S^{m-1} . Далее ω означает инвариантную меру в $G_{m,l}$, нормированную условием $\omega[G_{m,l}] = 1$. Если $w \in G_{m,l}$, то R_w^{m-l} означает $(m-l)$ -мерную плоскость проходящую через O и вполне ортогональную w , P_w есть оператор ортогонального проектирования на R_w^{m-l} .

Определим, что понимается здесь под ортогональной проекцией поверхности на d -мерную плоскость. Поверхность $\mathcal{P}$ по определению есть пара $\{M, x\}$, где M — r -мерное многообразие, $x: M \rightarrow R^m$ — погружение M класса C^m в R^m . Пусть R_v^d — произвольное d -мерное подпространство R^m , $v \in G_{m,m-d}$. Тогда определено отображение $P_v \circ x: M \rightarrow R_v^d$. Это отображение может быть регулярным в отдельных точках $t \in M$. Совокупность всех этих исключительных точек обозначим через Γ_v . Множество $M \setminus \Gamma_v$ есть r -мерное многообразие, в котором $P_v \circ x$ всюду регулярно. Пара $\{M \setminus \Gamma_v, P_v \circ x\}$ есть r -мерная поверхность в R_v^d . Обозначим ее через $\mathcal{P}_v$ и назовем ортогональной проекцией $\mathcal{P}$ на R_v^d .

Определим некоторые интегральные операторы $F_{d,r}$, действующие на множестве Σ_r^+ всех неотрицательных симметрических функций r переменных, измеримых по Борелю. Пусть $\chi \in \Sigma_r^+$ и $u \in S^{d-1}$ — единичный вектор в R^d . Фиксируем в R^d произвольный ортогональный репер $e_1, e_2, \dots, e_r$. Обозначим через $k_i(u)$ корни уравнения

$$\prod_{i=1}^r (k_i - \lambda) + \lambda \sum_{i=1}^r (e_i u)^2 \prod_{j \neq i} (k_j - \lambda) = 0.$$

Полагаем

$$F_{d,r} \chi(k_1, \dots, k_r) = \eta_{d,r} \int_{S^{d-1}} \left[1 - \sum (e_i u)^2 \right] \chi(k_1(u), \dots, k_r(u)) d\omega_u,$$

где $\eta_{d,r} = \frac{\omega_{d-1} \omega_{d-r}}{\omega_d \omega_{d-r-1}}$ ω_p — площадь S^p в R^{p+1} .

Отметим, что

$$F_{d,r} K_i = \eta_{d,r} \left(1 - \frac{r-i}{d} \right) K_i.$$

Для $\chi = \bar{K}_i$ имеем оценки

$$\sigma_i \bar{K}_i \leq \frac{F_{d,r} \bar{K}_i}{\eta_{d,r} (1 - (r-i)/d)} \leq \bar{K}_i,$$

где $0 < \sigma_i \leq 1$, $\sigma_i = \text{const}$, $\sigma_r = 1$.

Для $\chi \in \Sigma_r^+$ обозначим через $\Phi_{m,d} \chi$ результат последовательного применения операторов $F_{d,r}$, $F_{d+1,r}$, $\dots$, $F_{m-1,r}$ к функции χ , $\Phi_{m,d} \chi = F_{m-1,r}(\dots(F_{d,r} \chi))$.

Теорема 1. Для всякой функции $\chi \in \Sigma_r^+$ справедливо равенство

$$\int_{G_{m,m-d}} \chi(\mathcal{P}_v) d\omega_v = \Phi_{m,d} \chi(\mathcal{P}),$$

$$\int_{G_{m,m-d}} \chi(\mathcal{P}_v) d\omega_v = \Phi_{m,d} \chi(\mathcal{P}),$$

где правая часть означает функционалы, получаемые из $\mathcal{P}$ подстановкой в (1) и (2) вместо χ функции $\Phi_{m,d} \chi$.

Теорема доказывается последовательным применением формул, относящихся к случаю $d=m-1$.

Замечание. В случае $r=m-1$ по определению полагаем

$$\chi'(p) = \int_{S_p^0(\mathcal{P})} \chi(k_1(p, n), \dots, k_r(p, n)) = -\frac{1}{2} [\chi(k_i(p)) + \chi(-k_i(p))],$$

так как $k_i(p, -n) = -k_i(p, n)$.

Теперь перейдем к соотношениям, связанным с проектированием поверхности $\mathcal{P}$ на плоскости размерности $d \leq r$. Для каждой такой плоскости R_v^d , где $v \in G_{m,m-d}$, выделим множество точек поверхности $\mathcal{P}$, являющееся в определяемом далее смысле особым относительно оператора ортогонального проектирования на R_v^d . Проекция этого множества на R_v^d для почти всех v есть некоторая $(d-1)$ -мерная поверхность. Для этой поверхности находим величины, определяемые по формулам (1) и (2). Интегрируя результат по v , получим некоторые функционалы исходной поверхности. Теорема 2 дает явное выражение для этих функционалов. Приведем точные формулировки.

Пусть $1 \leq d \leq r$. Для $v \in G_{m,m-d}$ обозначим через Γ_v^d множество точек $p \in \mathcal{P}$, в которых отображение $P_v: \mathcal{P} \rightarrow R_v^d$ имеет дифференциал коранга 1.

Лемма 1. Для почти всех $v \in G_{m,m-d}$ множество Γ_v^d является $(d-1)$ -мерным подмногообразием M .

Рассмотрим отображение $P_v \circ x: \Gamma_v^d \rightarrow R_v^d$, т. е. сужение отображения P_v на Γ_v^d .

Лемма 2. Для почти всех $v \in G_{m,m-d}$ множество $\Gamma_v^{d'} \subset \Gamma_v^d$, где отображение P_v нерегулярно, имеет меру нуль на Γ_v^d .

Обозначим через $\mathcal{P}_v$ поверхность $\{\Gamma_v^d \setminus \Gamma_v^{d'}, P_v \circ x\}$ в подпространстве R_v^d .

Введем интегральный оператор Q_l , сопоставляющий функции $\chi(\mu_1, \dots, \mu_{l-1})$ от $(l-1)$ переменных функцию $Q_l \chi$ от l переменных по формуле

$$Q_l \chi[k_1, \dots, k_l] = \frac{\omega_{l-1}}{\omega_l} \int_{S^{l-1}} \chi'(k_1(v), \dots, k_{l-1}(v)) \left| \sum_{i=1}^l (e_i v)^2 \right| d\omega_v,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_l$ — ортогональный базис в R^l , v — вектор единичной сферы $S^{l-1} \subset R^l$, а $k_i(v)$ — корни уравнения

$$\sum_{i=1}^l k_i(e_i v)^2 \prod_{j \neq i} (k_j - \lambda) = 0.$$

Легко видеть, что $Q_l \chi$ не зависит от выбора репера $e_1, e_2, \dots, e_l$. Для $\chi = \bar{K}_{i-1}$ имеем оценки

$$\sigma_i \bar{K}_i \leq \gamma_i, \quad r Q_i \bar{K}_{i-1} \leq \bar{K}_i.$$

Теорема 2. 1) Пусть $\chi(\mu_1, \dots, \mu_{d-1}) = \bar{K}_i(\mu_1, \dots, \mu_{d-1})$; тогда

$$\Phi_{m,r+1} \cdot Q_r \cdot \dots \cdot Q_d \chi(\mathcal{P}) = \int_{G_{m,m-d}} \chi(\mathcal{P}_v) d\omega_v.$$

2) Пусть $\mathcal{P}$ — $(m-1)$ -мерная компактная выпуклая поверхность в R^m , причем в каждой точке все главные кривизны > 0 .

Тогда если $\chi \in \Sigma_{d-1}^+$ непрерывна и однородна, то

$$Q_{m-1} \cdot \dots \cdot Q_d \chi(\mathcal{P}) = \int_{G_{m,m-d}} \chi(\mathcal{P}_v) d\omega_v.$$

Теорема доказывается последовательным применением формул, относящихся к случаю $d=r=m-1$, установленных в ⁽³⁾.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность Ю. Г. Решетняку за постановку задачи и полезные советы.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
28 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Г. Решетняк, Вестн. Ленингр. ун-в., № 3 (1957). ² Ю. Д. Бураго, Зап. научн. семинаров, Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 10 (1968).
³ В. В. Славский, Сибирск. матем. журн., 13, № 3, 645 (1972).