Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 518.5:681.142.2 *МАТЕМАТИКА*

А. Я. ДИКОВСКИЙ

К ОБЩЕМУ ПОНЯТИЮ СЛОЖНОСТИ ВЫВОДА В КОНТЕКСТНО-СВОБОДНОЙ ГРАММАТИКЕ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 16 V 1973)

В настоящей заметке предлагается некоторое аксиоматическое понятие сложности вывода в контекстно-свободных грамматиках (КС-грамматиках), включающее как частные случаи известные понятия сложности контекстно-свободного вывода, и в терминах этого общего понятия решается стоявший для конкретных мер сложности вопрос о возможности классификации КС-грамматик и КС-языков по порядкам роста сложностных функций.

Введем следующие обозначения. Через $\Delta_k(\text{КС})$ и $\Delta_k(\text{Л})$ обозначим классы деревьев выводов соответственно в КС-грамматиках и линейных грамматиках, длины правых частей правил которых не превышают k, и положим $\Delta(\text{КС})=\bigcup\limits_k \Delta_k(\text{КС})$ и $\Delta(\text{Л})=\bigcup\limits_k \Delta_k(\text{Л})$. Для каждой КС-грамматики Γ через $\Delta(\Gamma)$ обозначим множество всех деревьев полных выводов (т. е. выводов терминальных цепочек из аксиомы) в этой грамматике. Через $x(\gamma)$, $\gamma\in\Delta(\text{КС})$, будем обозначать терминальную цепочку дерева γ и через $\leqslant_\gamma$ — отношение частичного порядка на вершинах γ.

Если задан критерий сложности деревьев выводов, т. е. отображение τ: $\Delta(\text{КС})\to Z_+$ *, то сложность выводов в любой КС-грамматике Γ измеряется с помощью функции $\tau_\Gamma(n)$, стандартным образом связываемой с этим критерием. Именно,

$$\tau_\Gamma(n)=\max\{\tau_\Gamma(x)\,|\,x\in L(\Gamma)\cup\{\Lambda\},\ \ |x|\leqslant n\},\quad \text{где}\quad \tau_\Gamma(\Lambda)\overset{\text{def}}{=}0,$$

и для $x\neq\Lambda$

$$\tau_\Gamma(x)=\min\{\tau(\gamma)\,|\,\gamma\in\Delta(\Gamma),\ \ x=x(\gamma)\}.$$

Поэтому задача формализации понятия сложности вывода в КС-грамматике сводится к соответствующей задаче для критерия сложности дерева вывода.

Чтобы сформулировать определение критерия сложности, введем несколько отношений частичного порядка на множестве $\Delta(\text{КС})$. Пусть $\gamma,\ \gamma'\in\Delta(\text{КС})$ и каждой вершине α дерева γ можно сопоставить поддерево γ_α' дерева γ' так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) если $\alpha\neq\beta$, то γ_α' и γ_β' не имеют общих вершин;

б) если $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ — все вершины, в которые идут дуги из вершины α в γ, то в дереве γ_α' имеются висячие вершины $\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_k}$ такие, что в дереве γ' из каждой вершины β_{i_j} идет дуга в корень дерева γ_{α_j}', $1\leqslant j\leqslant k$;

в) каждая вершина γ' является вершиной некоторого поддерева вида γ_α';

г) если $\alpha_1\leqslant_\gamma\alpha_2$ в γ, то для каждой вершины β_1 дерева γ_{α_1}' и каждой вершины β_2 дерева γ_{α_2}' имеет место $\beta_1\leqslant_{\gamma'}\beta_2$. О таких деревьях γ и γ' мы

* Z_+ — множество неотрицательных целых чисел; в настоящей заметке все числовые функции, подкванторные переменные и знаки констант рассматриваются на этом множестве.

будем говорить, что γ' является **укрупнением** γ (обозначение $\gamma \leqslant \gamma'$); при этом, если каждой вершине α дерева γ соответствует в γ' поддерево γ_α': (I) имеющее не более k вершин и принадлежащее Δ(Л), (II) являющееся вырожденным*, то мы будем говорить, что γ' является **линейным k-укрупнением** (соответственно **тривиальным укрупнением**) **дерева** γ, и пользоваться обозначением $\gamma \leqslant_{лk} \gamma'$ (соответственно $\gamma \leqslant_{т} \gamma'$).

Для каждого дерева γ и дерева γ_1 с выделенной висячей вершиной α через Sub $(\gamma_1, \alpha, \gamma)$ обозначим дерево, получающееся из γ_1 «подвешиванием» γ к α.

Отображение τ: $\Delta(\text{КС}) \to Z_+$ назовем **критерием сложности дерева вывода** (или просто **критерием сложности**), если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

A. С τ можно связать монотонно неубывающую, неограниченную, всюду определенную, сохраняющую порядок** функцию $f_\tau(n)$ такую, что

а) $\forall k \quad \exists c_k, \quad \forall \gamma \in \Delta_k(\text{КС}) \quad [c_k f_\tau(|x(\gamma)|) > \tau(\gamma)]$;

б) существуют $k_0 > 1$, бесконечная последовательность деревьев полных выводов $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots\} \subset \Delta_{k_0}(\text{КС})$ и константа c такие, что $\forall i \; [c\tau(\gamma_i) > f_\tau(|x(\gamma_i)|)]$ (f_τ мы будем называть **функцией, аппроксимирующей** τ).

B. $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Delta(\text{КС}) \quad [\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \supset \tau(\gamma_1) \leqslant \tau(\gamma_2)]$.

C. $\forall k \quad \exists c_k, \; \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_k(\text{КС}), \; \forall \gamma_0 \in \Delta_k(\text{Л}), \; \forall \alpha \quad [\gamma_1 = \text{Sub}(\gamma_0, \alpha, \gamma_2) \supset c_k \tau(\gamma_2) > \tau(\gamma_1)]$.

D. $\forall k \quad \exists c_k, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_k(\text{КС}) \quad [\gamma_1 \leqslant_{лk} \gamma_2 \supset c_k \tau(\gamma_1) > \tau(\gamma_2)]$.

E. $\forall k \quad \exists c_k, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_k(\text{КС}) \quad [\gamma_1 \leqslant_{т} \gamma_2 \supset c_k \tau(\gamma_1) > \tau(\gamma_2)]$.

*F****. Отображение τ, аппроксимирующая его функция f_τ и последовательность $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ являются эффективными.

Аксиома *C* является наиболее специфической. Во-первых, она «бракует» меры сложности, рост которых связан линейной зависимостью с числом вершин дерева вывода (например, время и емкость вывода), и, во-вторых, согласно *C* сложность деревьев из Δ(Л) (топологически простейший вид деревьев) является ограниченной. Таким образом, такие меры сложности деревьев составляющих, как степень самовставления и глубина по Ингве (см., например, ([1])), не являются критериями сложности в смысле аксиом *A*—*F*; но все существенные характеристики деревьев выводов в КС-грамматиках такие, как активная емкость (иначе — индекс) $s(\gamma)$ ([2]), разброс $\rho(\gamma)$ ([3]), густота $\mu(\gamma)$ ([4]) и др., удовлетворяют этим аксиомам. Критерии s и μ, например, аппроксимируемы функцией $\log_2 n$, а критерий ρ — функцией $f_\rho(n) = n$.

Пусть f — всюду определенная монотонно неубывающая функция. Назовем **τ-классом сложности** f множество языков

$$\mathfrak{L}_\tau(f) = \{L \mid \exists \Gamma_0 \in \mathbf{КС} \quad [L(\Gamma_0) = L \,\&\, \tau_{\Gamma_0}(n) \preccurlyeq f(n)]\} \cap \{L \mid \forall \Gamma \in \mathbf{КС} \quad [L(\Gamma) = L \supset \tau_\Gamma(n) \overrightarrow{\frown} f(n)]\} \; ****$$

---

* **Вырожденным** называется дерево, имеющее единственную висячую вершину.

** Монотонно неубывающая функция f **сохраняет порядок**, если

$$\forall c_1 \quad \exists c_2, \; \forall n, \; n_1 \quad [c_1 n \geqslant n_1 \supset c_2 f(n) > f(n_1)].$$

*** Аксиома *F* нигде в работе не используется; если ограничиться рассмотрением КС-грамматик без правил вида $A \to B$, то аксиома *E* не нужна; аксиому *B* можно несколько ослабить.

**** Здесь через **КС** обозначается класс всех КС-грамматик. В заметке рассматриваются следующие соотношения по порядку: $g \preccurlyeq f$ означает: «g/f всюду ограничено»; $f \succsim g$ означает «g/f ограниченно на бесконечном множестве»;

$$g \asymp f \overset{\text{def}}{=} g \preccurlyeq f \,\&\, f \preccurlyeq g; \; f \overset{\succsim}{\frown} g \overset{\text{def}}{=} f \succsim g \,\&\, g \succcurlyeq f.$$

Из аксиомы Aа) непосредственно следует, что для всякого критерия сложности τ, аппроксимируемого функцией f_τ, и для всякой КС-грамматики Γ имеет место верхняя оценка по порядку $\tau_\Gamma(n) \preccurlyeq f_\tau(n)$. При этом оказывается, что τ-класс сложности f_τ является непустым. Рассмотрим алфавит $V_0=\{a, b, (,)\}$ и однозначную КС-грамматику Γ_{τ_0} с аксиомой J_0, основным алфавитом V_0 и правилами вида $J_0 \to (J_{01})$, $J_{01} \to aJ_{01}b$, $J_{01} \to aJ_0^i b$, $J_{01} \to ab$, где $1 \leqslant i \leqslant k_0$, k_0 — связываемое с τ число из аксиомы Aб). Язык, порождаемый этой грамматикой, обозначим через L_τ. Имеет место

Теорема 1. *Если τ — критерий сложности, аппроксимируемый функцией f_τ, то $L_\tau \in \mathfrak{L}_\tau(f_\tau)$.*

Таким образом, рост функций $\tau_\Gamma(n)$ заключен по порядку между константами и функциями вида $f_\tau(n)$ и обе границы являются достижимыми. Чтобы обосновать выбор понятия критерия сложности в качестве меры сложности вывода, мы покажем существование бесконечных иерархий классов вида $\mathfrak{L}_\tau(f)$. Для этого мы рассмотрим класс машин Тьюринга (сокращенно м.Т.) с единственной лентой и головкой, вычисляющих всюду определенные функции, и будем считать, что зафиксировано некоторое естественное понятие протокола $\pi_{\mathfrak{M}}(x)$ вычисления м.Т. $\mathfrak{M}$ на слове x (скажем, конфигурации выписываются в порядке следования и разделяются знаком §). С каждой м.Т. $\mathfrak{M}$ свяжем функцию

$$p_{\mathfrak{M}}(n) = \begin{cases} \max \{r \mid \exists x \quad [\,|x|=r \,\&\, 2|\pi_{\mathfrak{M}}(x)| \leqslant n-r]\}, & \text{если max существует} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и будем накладывать на м.Т. ограничение

M. Функция $|\pi_{\mathfrak{M}}(x)|$ не убывает по отношению к длинам слов x.

С каждой м.Т. $\mathfrak{M}$ и каждым критерием сложности τ свяжем КС-язык $L_{\tau\mathfrak{M}}$ следующим образом. Пусть L_τ — КС-язык из теоремы 1. Обозначим через $\vdash_{\mathfrak{M}}$ индуцируемый м.Т. $\mathfrak{M}$ оператор непосредственного следования на множестве конфигураций $\mathfrak{M}$; для обозначения конфигураций мы будем использовать символ Q с индексами. Рассмотрим КС-язык $L_{\tau\mathfrak{M}} = \bigcup_{i=1}^{4} L_{\tau\mathfrak{M}i}\{*^j \mid j \geqslant 0\}$, где

$$L_{\tau\mathfrak{M}1}=\{\hat{Q}_n{}'\S \ldots \S\hat{Q}_1{}'(a^t y b^t)Q_1\S \ldots \S Q_n \mid n\geqslant 1,\ t\geqslant 1,\ \exists i \quad [Q_i \neq Q_i{}'],$$
$$y \in \{\Lambda\} \cup (V_0^*)\}\ *;$$
$$L_{\tau\mathfrak{M}2}=\{\hat{Q}_n{}'\S \ldots \S\hat{Q}_1{}'(a^t y b^t)Q_1\S \ldots \S Q_n \mid n\geqslant 1,\ t\geqslant 1,\ \exists i \quad [Q_i{}' \vdash_{\mathfrak{M}} Q_{i+1}],$$
$$y \in \{\Lambda\} \cup (V_0^*)\};$$
$$L_{\tau\mathfrak{M}3}=\{\hat{Q}_n{}'\S \ldots \S\hat{Q}_1{}' x Q_1\S \ldots \S Q_n \mid n\geqslant 1,\ x \in V_0^+,\ |x|>|Q_1|\};$$
$$L_{\tau\mathfrak{M}4}=\{\hat{Q}_n{}'\S \ldots \S\hat{Q}_1{}' x Q_1\S \ldots \S Q_n \mid n\geqslant 1,\ x \in L_\tau\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть τ — f_τ-аппроксимируемый критерий сложности и $\mathfrak{M}$ — м.Т., удовлетворяющая условию M. Тогда $L_{\tau\mathfrak{M}} \in \mathfrak{L}_\tau(f_\tau(p_{\mathfrak{M}}(n)))$.*

Иерархии, описываемые теоремой 2, являются весьма богатыми, поскольку среди функций, совпадающих по порядку с функциями вида $p_{\mathfrak{M}}(n)$, имеются, например, всевозможные функции вида $\max\{r \mid 2^{\varphi_{\mathfrak{M}_1}(r)} \leqslant n\}$, где $\varphi_{\mathfrak{M}_1}(r)$ — неубывающая функция, обладающая свойством $\exists c>0$, $\forall^\infty r \quad [\varphi \quad (cr)>\varphi \quad (r)+1]$ и вычислимая на м.Т. $\mathfrak{M}_1$ так, чтобы $|\pi \quad (r)| \succcurlyeq \preccurlyeq 2^{\varphi_{\mathfrak{M}_1}(r)}$. Поэтому для любого f_τ-аппроксимируемого критерия сложности можно так подобрать м.Т. $\mathfrak{M}$, чтобы она удовлетворяла M и при этом, ска-

---

* $\hat{Q}$ – зеркальный образ Q, $V^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} V^i$ $V^* = V_+ \cup \{\Lambda\}$.

жем, $f_\tau(p_{\mathfrak{M}}(n)) \asymp f_\tau(n^{p/q})$, $2p<q$, или для некоторого $k>0$ $f_\tau(p_{\mathfrak{M}}(n)) \asymp f_\tau(\underbrace{\log \ldots \log}_{k} n)$, для любого f_τ-аппроксимируемого критерия сложности τ такого, что $f_\tau(n) \asymp f_\tau(n \cdot o(n))$ (такими являются, например, s и μ); можно для всяких $p<q$ подобрать м.Т. $\mathfrak{M}$ так, чтобы $f_\tau(p_{\mathfrak{M}}(n)) \asymp f_\tau(2^{\log^{p/q} n})$, и т. д.

Однако в классе КС-языков можно выделить важный и широкий подкласс так называемых маркированных языков *, в котором по крайней мере с критериями густоты и активной емкости невозможно связать бесконечных сложностных иерархий. Точнее, имеет место

Теорема 3. *Пусть L — некоторый маркированный* КС-*язык. Тогда:*

а) *Либо для всех КС-грамматик* Γ, *порождающих* L, *функции* $\mu_\Gamma(n)$ *и* $s_\Gamma(n)$ *ограничены, либо у них у всех* $\mu_\Gamma(n) \asymp s_\Gamma(n) \asymp \log n$.

б) *Существует алгоритм, позволяющий по произвольной* КС-*грамматике, порождающей* L, *узнать, какая из двух указанных в п. А) ситуаций имеет место для нее.*

В основе доказательства этой теоремы лежит конструкция из ([7]).

Автор глубоко благодарен за обсуждение работы А. В. Гладкому, Б. А. Трахтенброту и участникам семинара по конструктивной математике и математической логике в Ленинградском отделении математического института АН СССР под руководством Н. А. Шанина.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Бар-Хиллел, А. Кашер, Э. Шамир, Кибернетич. сборн., Нов. сер. в. 4 (1967). [2] B. Brainerd, Information and Control, **11**, № 5/6 (1968). [3] А. В. Гладкий, А. Я. Диковский, Тр. II Всесоюзн. конфер. по программированию. Заседание К, в. 1, Новосибирск, 1970, стр. 43. [4] А. Я. Диковский, ДАН, **192**, № 5 (1970). [5] М. И. Белецкий, Кибернетика, № 4 (1967). [6] S. Ginsburg, M. A. Harrison, J. Computer and System Sci., **1**, № 1 (1967). [7] А. Я. Диковский, Пробл. передачи информации, 8, № 2 (1972).

---

* КС-грамматика $\Gamma = (V, V_1, J, R)$ является маркированной, если в V имеется пара скобок и всякое правило имеет вид $A \to (X)$, где $X \in [V \cup V_1 - \{(,)\}]^+$. Эти грамматики и порождаемые ими (маркированные) языки были независимо введены в ([5]) и ([6]).