

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ НАБЛЮДЕНИЯ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 17 V 1973)

Пусть $\xi(t)$ — действительный стационарный в широком смысле процесс с неизвестным математическим ожиданием m и заданной непрерывной корреляционной функцией $r(t)$. В некоторых прикладных задачах возникает вопрос об оценке среднего значения процесса $\xi(t)$ по реализации, наблюдаемой только на определенной части интервала времени, в течение которого процесс доступен наблюдению. При этом даже в случае простейших оценок не ясно, как наилучшим образом использовать возможные наблюдения процесса. В настоящей заметке рассматривается одна задача такого типа.

Пусть K — множество действительных измеримых функций g , определенных на $[0, T]$ и удовлетворяющих условиям

$$0 \leq g(t) \leq 1, t \in [0, T]; \quad 0 < \int_0^T g(t) dt = C, C < T;$$

C, T — фиксированные числа. Рассмотрим задачу о выборе функции $g \in K$, для которой дисперсия оценки

$$\hat{m} = \left[\int_0^T g(t) dt \right]^{-1} \cdot \int_0^T g(t) \xi(t) dt,$$

построенной по методу наименьших квадратов для среднего значения m по наблюдениям процесса $\sqrt{g(t)} \xi(t)$ на интервале $[0, T]$, минимальна. Случай, когда функция g является характеристической функцией некоторой системы интервалов на $[0, T]$ с общей длиной C , соответствует оценке $\hat{m}$, построенной по наблюдениям процесса $\xi(t)$ на этой системе интервалов.

Очевидно

$$M\hat{m} = m, \quad M(\hat{m} - m)^2 = C^{-2} \int_0^T \int_0^T r(t-s) g(t) g(s) dt ds.$$

Пусть

$$F(g, h) = \int_0^T \int_0^T r(t-s) g(t) h(s) dt ds$$

для функций $g, h \in K$, при этом $F(g, h) = F(h, g)$, $F(g, g) \geq 0$. Отметим также, что множество K выпукло. Переходя от функций $g(t)$ к функциям

$\int_0^T g(t) dt$ и используя теорему Хелли, легко показать, что функция, мини-

мизирующая дисперсию оценки $\hat{m}$ в классе K , существует. Справедливы следующие утверждения относительно функции $g^*(t)$, минимизирующей дисперсию m .

Лемма 1. Для функции $g^*(t)$, минимизирующей функционал $F(g, g)$, $g \in K$, существует функция $\chi(t) \in K$, удовлетворяющая условию

$$\chi(t) = \chi(T-t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

и такая, что $F(\chi, \chi) = F(g^*, g^*)$. Если процесс $\xi(t)$ имеет положительную спектральную плотность, то функция $g^*(t)$ удовлетворяет условию (1) почти всюду на $[0, T]$.

Лемма 2. Если функция $g^* \in K$ такова, что

$$F(g^*, g^*) \leq F(g, g), \quad g \in K,$$

то

$$F(g^*, g^*) \leq F(g^*, g), \quad g \in K.$$

Доказательства лемм 1 и 2 используют неравенство Коши, спектральное представление корреляционной функции и некоторые простые рассуждения.

Леммы 1 и 2 позволяют установить следующую теорему.

Теорема 1. Функция g^* , минимизирующая функционал $F(g, g)$, $g \in K$, есть характеристическая функция множества $E^* \subset [0, T]$, определяемого соотношениями

$$E^* = \left\{ s : \int_0^T r(t-s) \chi_{E^*}(t) dt < \lambda \right\}, \quad (2)$$

$$\int_{E^*} dt = C, \quad g^*(t) = \chi_{E^*}(t) = \begin{cases} 1, & t \in E^*, \\ 0, & t \notin E^*. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 основано на соображениях, аналогичных тем, с помощью которых доказывается лемма Неймана — Пирсона. Множество E^* определяется единственным образом и является симметричным относительно точки $T/2$.

При сделанных предположениях множество E^* является объединением не более чем счетного числа интервалов, лежащих на отрезке $[0, T]$. В том случае, когда множество E^* состоит из конечного числа интервалов, для определения множества E^* может быть использована система, вообще говоря нелинейных уравнений с конечным числом переменных. Выбор числа интервалов, составляющих множество E^* , осуществляется сравнением соответствующих дисперсий. Если множество E^* на интервале $[0, 1/2 T]$ состоит из интервалов $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, $0 \leq u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \dots < u_n < v_n < 1/2 T$, то числа $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{1/2 T} [r(u_j - t) + r(u_j + t)] \chi_{E^*}(1/2 T - t) dt = \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$\int_0^{1/2 T} [r(v_j - t) + r(v_j + t)] \chi_{E^*}(1/2 T - t) dt = \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n (v_j - u_j) = 1/2 C.$$

Если множество E^* на интервале $[0, 1/2T]$ состоит из интервалов (u_1, v_1) , $(u_2, v_2), \dots, (u_n, 1/2T)$, $0 \leq u_1 < v_1 < u_2 < \dots < u_n < 1/2T$, то числа $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n$ удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{1/2T} [r(u_j - t) + r(u_j + t)] \chi_{E^*}(1/2T - t) dt = \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\int_0^{1/2T} [r(v_j - t) + r(v_j + t)] \chi_{E^*}(1/2T - t) dt = \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (v_j - u_j) + 1/2T - u_n = 1/2C.$$

Если $u_1 = 0$, то соответствующее равенство в системах (3) и (4) не обязано выполняться.

Легко показать, что в случае монотонно невозрастающей при $t > 0$ корреляционной функции $r(t)$ некоторая полукрестность точки 0 принадлежит множеству E^* и поэтому $u_1 = 0$.

Для случая процесса с корреляционной функцией

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp \{-a|\tau|\}$$

(σ^2, a — положительные фиксированные числа) при любом числе компонент множества E^* системы (3), (4) можно свести к решению двух уравнений. Именно, можно показать, что при любом числе компонент множество E^* , удовлетворяющее условиям (2), состоит из интервалов, расположенных на расстоянии δ , среди которых два крайние равны α , а все остальные γ . Числа α, δ и γ определяются соотношениями

$$2\alpha + (n-2)\gamma = C, \quad \delta = (T-C)/(n-1), \quad e^{a\gamma} - e^{-a\delta} = e^{a\alpha}(1 - e^{-a\delta})$$

(n — число компонент множества E^*).

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
7 V 1973