Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 517.1 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ЯЗЫКЕ $Я_1$

В [1] был построен язык $Я_0$ — возможный фундамент ступенчатой семантической системы конструктивной математической логики. Здесь строится некоторый язык $Я_1$ — возможный следующий этаж «башни» языков. Терминология, обозначения и сокращения, введенные в [1], применяются и в настоящей заметке.

Определим формулы языка $Я_1$ [Фл1] следующими правилами построения:

Фл 1.1. $$\frac{A\text{—Фл}\,0}{A\text{—Фл}\,1};$$

Фл 1.2. $$\frac{\lambda\text{—Юр};\ A \text{ и } B\text{—Фл}\,1;\ A \text{ не Фл}\,0 \text{ или } B \text{ не Фл}\,0}{\lambda AB\text{—Фл}\,1};$$

Фл 1.3. $$\frac{X\text{—Пн},\ A\text{—Фл}\,1}{\exists XA\text{—Фл}\,1}.$$

Всякая Фл1 представляется в одном и только в одном из видов: A, где A — Фл0; λAB, где λ — Юр, A и B — Фл1, причем хотя бы одна из них не есть Фл0; $\exists XA$, где X — Пн, A — Фл1. Во всех трех случаях указанное представление единственно.

Определим параметры в языке $Я_1$ [Пр1] Фл1 следующими правилами:

Пр1.1. Пр1 Фл0 считаются ее Пр в языке $Я_0$ (называемые в [1] просто параметрами);

Пр.1.2. Пр1 Фл1 λAB, где λ — Юр, A и B — такие Фл1, что хотя бы одна из них не есть Фл0, считаются Пр1 A и Пр1 B;

Пр1.3. Пр1 Фл1 $\exists XA$, где X — Пн, A — Фл1, считаются Пр1 А, отличные от X.

Будем называть замкнутыми (в $Я_1$) [ЗФ1] Фл1 без Пр1. Будем называть X Фл в $Я_1$ [ХФ1], где X — Пн, Фл1, не имеющие Пр1, отличных от X. Будем называть XY Фл в $Я_1$ [XYФ1], где X и Y — Пн, Фл1, не имеющие Пр1, отличных от X и от Y, и т. д.

Очевидно, что Фл0 замкнута в $Я_1$ тогда и только тогда, когда она замкнута в $Я_0$.

Определим алгорифм $\mathfrak{E}_1$ следующими равенствами:

$\mathfrak{E}_1 1.$ $\mathfrak{E}_1\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons 0;$

$\mathfrak{E}_1 2.$ $\mathfrak{E}_1\llcorner \lambda BC\lrcorner \rightleftharpoons 1+\mathfrak{E}_1\llcorner B\lrcorner+\mathfrak{E}_1\llcorner C\lrcorner;$

$\mathfrak{E}_1 3.$ $\mathfrak{E}_1\llcorner \exists XD\lrcorner \rightleftharpoons 1+\mathfrak{E}_1\llcorner D\lrcorner;$

здесь A — любая Фл0, λ — Юр, B и C — такие Фл1, что хотя бы одна из них не есть Фл0, X — Пн, D — Фл1.

Алгорифм $\mathfrak{E}_1$ применим ко всякой Фл1 и перерабатывает всякую Фл1 в НЧ. Мы будем называть $\mathfrak{E}_1\llcorner A\lrcorner$, где A — Фл1, логической длиной этой Фл1 в языке $Я_1$. Логическая длина в $Я_1$ Фл1 A равна нулю тогда и только тогда, когда A есть Фл0.

Определим результат подстановки Тм T вместо Пн X в Фл1 A в языке $Я_1$, обозначаемый $\mathfrak{F}_1\llcorner XAT\lrcorner$. Определение будет индуктивным. Основанием индукции послужит случай, когда $\mathfrak{E}_1\llcorner A\lrcorner \stackrel{\circ}{=} 0$, т. е. когда A — Фл0 (см. ниже пункт $\mathfrak{F}_1 1$). Далее в предположении, что $\mathfrak{F}_1\llcorner XAT\lrcorner$ определено, коль скоро $\mathfrak{C}_{1\llcorner}A_\lrcorner\leqslant M$, где M — НЧ, определим $\mathfrak{F}_{1\llcorner}XAT_\lrcorner$ при $\mathfrak{C}_{1\llcorner}A_\lrcorner\doteq M+1$ (см. ниже пункты $\mathfrak{F}_1 2$ и $\mathfrak{F}_1 3$). А именно, определим алгорифм $\mathfrak{F}_1$ следующими равенствами:

$\mathfrak{F}_1 1$. $\mathfrak{F}_{1\llcorner}XBT_\lrcorner\rightleftharpoons\mathfrak{F}_{0\llcorner}BT_\lrcorner$;

$\mathfrak{F}_1 2$. $\mathfrak{F}_{1\llcorner}X\lambda CDT_\lrcorner\rightleftharpoons\lambda\mathfrak{F}_{1\llcorner}XCT_\lrcorner\mathfrak{F}_{1\llcorner}XDT_\lrcorner$;

$$\mathfrak{F}_1 3 \quad \mathfrak{F}_{1\llcorner}X\exists YET_\lrcorner\rightleftharpoons\begin{cases}\exists YE, \text{ если } X \text{ не есть Пр 1 } \exists YE,\\ \exists Y\mathfrak{F}_{1\llcorner}XET_\lrcorner, \text{ если } X \text{ — Пр 1 } \exists YE \text{ и } Y \text{ не}\\ \text{входит в } T,\\ \exists Z\mathfrak{F}_{1\llcorner}X\mathfrak{F}_{1\llcorner}YEZ_\lrcorner T_\lrcorner, \text{ если } X \text{ — Пр 1 } \exists YE \text{ и } Y\\ \text{входит в } T;\end{cases}$$

здесь X — Пн, B — Фл0, T — Тм, λ — Юр, C и D — Фл1, причем хотя бы одна из них не есть Фл0, Y — Пн, E — Фл1, Z — самая короткая из Пн, не входящих в T и не являющихся Пр1 E.

Определим теперь наше понимание ЗФ1 посредством следующих четырех семантических соглашений:

Сс1.1. Всякая ЗФ0 выражает на языке $Я_1$ то же, что на языке $Я_0$;

Сс1.2. ЗФ1 $\& BC$, где B и C — ЗФ1 такие, что хотя бы одна из них не есть Фл0, выражает на языке $Я_1$ истинность обеих этих ЗФ1;

Сс1.3. ЗФ1 $\vee BC$, где B и C таковы, как в Сс1.2. выражает на языке $Я_1$, что мы в состоянии указать одну из них как верную в $Я_1$;

Сс1.4. ЗФ1 $\exists XD$, где D — XФ1, выражает на языке $Я_1$, что мы в состоянии указать такой Вд Q, что ЗФ1 $\mathfrak{F}_{1\llcorner}XDQ_\lrcorner$ будет верной.

Это определение мы также рассматриваем как индуктивное. Индукция идет здесь по логической длине той ЗФ1, понимание которой определяется.

Язык $Я_1$ приспособлен для описания работы НА в следующем смысле.

Пусть $\mathfrak{A}$ — НА в каком-нибудь алфавите А ([2]). Тогда могут быть построены xФ1 $(x!)_{\mathfrak{A}}$ и xyФ1 $(x\Rightarrow y)_{\mathfrak{A}}$ со следующими свойствами:

ЗФ1 $\mathfrak{F}_{1\llcorner}x(x!)_{\mathfrak{A}}\mathfrak{T}_{\text{А}\llcorner}P_{\lrcorner\lrcorner}$ тогда и только тогда верны для слова P в алфавите А, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P; здесь $x\rightleftharpoons c$.

ЗФ1 $\mathfrak{F}_{1\llcorner}y\mathfrak{F}_{1\llcorner}x(x\Rightarrow y)_{\mathfrak{A}}\mathfrak{T}_{\text{А}\llcorner}P_{\lrcorner\lrcorner}\mathfrak{T}_{\text{А}\llcorner}Q_{\lrcorner\lrcorner}$ тогда и только тогда верна для слов P и Q в алфавите А, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ перерабатывает P в Q; здесь $x\rightleftharpoons(c)$, $y\rightleftharpoons(cc)$.

Будем теперь интересоваться НА постольку, поскольку они перерабатывают Вд в Вд. Не ограничивая существенно общности рассмотрения, можно считать, что алфавитом этих алгорифмов является двубуквенное расширение $a(\ )bd$ алфавита вербоидов $a(\ )$ ([2]). Изображения таких алгорифмов (см. ([2])) будем строить как слова в алфавите

$$\text{Б}\rightleftharpoons a(\ )bdefg.$$

Записью на $\mathfrak{A}$ в алфавите $a(\ )bd$ будем называть перевод его изображения относительно алфавита Б. Имеем, таким образом,

$$\mathfrak{A}^{з}\rightleftharpoons\mathfrak{T}_{\text{Б}\llcorner}\mathfrak{A}^{и}{}_\lrcorner,$$

где $\mathfrak{A}^{з}$ означает запись НА $\mathfrak{A}$ в алфавите $a(\ )bd$, $\mathfrak{A}^{и}$ — изображение $\mathfrak{A}$.

Запись всякого НА в алфавите $a(\ )bd$ есть Вд, однозначно определяющий этот НА.

Может быть построена xyzФ1 $(x\colon y\Rightarrow z)$, *удовлетворяющая следующему условию: каковы бы ни были* Вд P, Q *и* R, ЗФ1

$$\mathfrak{F}_{1\llcorner}z\mathfrak{F}_{1\llcorner}y\mathfrak{F}_{1\llcorner}x(x\colon y\Rightarrow z)P_\lrcorner Q_\lrcorner R_\lrcorner$$

тогда и только тогда верна, когда имеется НА *в алфавите* $a(\ )bd$ *с записью* P, *перерабатывающий* Q *в* R; *здесь* $x\rightleftharpoons c$, $y\rightleftharpoons(cc)$, $z\rightleftharpoons(ccc)$.

Ввиду наличия xФ1 $(x!)_{\mathfrak{A}}$ с указанным выше свойством, язык $Я_1$ в отличие от языка $Я_0$ неразрешим: *невозможен алгорифм, применимый ко* *всякой ЗФ1 A и перерабатывающий A в Λ тогда и только тогда, когда A верна.*

С другой стороны, *имеется исчисление, семантически пригодное и семантически полное для языка $Я_1$, т. е. такое исчисление* И, *что соблюдаются условия*:

а) *всякое слово, выводимое в* И, *есть* ЗФ1, *верная в языке $Я_1$*;

б) *всякая верная в $Я_1$* ЗФ1 *выводима в* И.

Исчисление И с этими свойствами строится следующим образом.

Будем рассматривать р я д ы ЗФ1 [РФ], определяемые правилами построения:

РФ1. Λ—РФ;

РФ2. $$\frac{S\text{—РФ}, A\text{—ЗФ1}}{SA\text{—РФ}}$$

Будем говорить, что ЗФ1 A есть ч л е н [Чн] РФ S, если имеются РФ T и U такие, что $S \overset{\circ}{=} TAU$. Будем говорить, что A есть п о с л е д н и й ч л е н [ПЧ] РФ S, если имеется РФ T, такой, что $S \overset{\circ}{=} TA$.

Всякий непустой РФ единственным образом представляется в виде SA, где S — РФ, A — ЗФ1.

Будем говорить, что ЗФ1 C есть н е п о с р е д с т в е н н о е с л е д с т в и е [НС] из РФ S, в следующих случаях:

а) если C — верная ЗФ0;

б) если имеются Чн S A и B такие, что $C \overset{\circ}{=} \& AB$;

в) если имеются ЗФ1 A и B такие, что A — Чн S и $C \overset{\circ}{=} \bigvee AB$;

г) если имеются ЗФ1 A и B такие, что B — Чн S и $C \overset{\circ}{=} \bigvee AB$;

д) если имеются Пн X, ХФ1 D и Вд Q такие, что $\mathfrak{F}_{1}\llcorner XDQ \lrcorner$ — Чн S и $C \overset{\circ}{=} \exists XD$.

Определим понятие в ы в о д а [Вв] следующими правилами построения:

Вв1. Λ — Вв;

Вв2. $$\frac{S\text{—Вв}, C\text{—НС из } S}{SC\text{—Вв}}$$

Всякий Вв, очевидно, есть РФ.

Будем говорить, что слово A в алфавите в ы в о д и м о, если имеется Вв с Чн A.

Нетрудно видеть, что A тогда и только тогда выводимо, когда оно есть ПЧ некоторого Вв. Мы говорим тогда об этом Вв, что он есть Вв A.

И с ч и с л е н и е м И мы будем называть только что данное определение выводимости. Его семантическая пригодность и семантическая полнота для языка $Я_1$ доказываются без труда.

Текст «S есть Вв A» можно рассматривать как двуместный предикат с вербальными свободными переменными, пробегающими слова в алфавите $А_1 \rightleftharpoons ac(\ )\{\ \}=\neq\&\bigvee\forall\exists\langle\ \rangle$ [3]. Нетрудно видеть, что этот предикат разрешим.

Текст «A выводимо» выражает то же, что текст

$$\text{существует } \tilde{S} \text{ такое, что } \tilde{S} \text{ есть Вв } A. \qquad (1)$$

При замене свободной переменной A каким-либо ее допустимым значением — словом в алфавите $А_1$ — из (1) возникает полуразрешимое высказывание [3], ввиду чего (1) можно квалифицировать как п о л у р а з р е ш и м ы й п р е д и к а т. Вместе с тем «A выводимо» равносильно «A есть верная ЗФ1». Таким образом, текст

$$A \text{ — верная ЗФ1} \qquad (2)$$

можно считать полуразрешимым предикатом: из него в результате замены буквы A словами в алфавите $А_1$ возникают полуразрешимые высказывания. Это дает возможность рассматривать импликации с посылками вида (2), где A — ЗФ1, как усиленные импликации ([3]). Текст

$$\text{если } A, \text{ то } B, \tag{3}$$

где A и B — ЗФ1, будет при этом пониматься как

$$\text{каково бы ни было } \tilde{S}, \ [[\tilde{S} \text{ не есть Вв } A] \text{ или } B].$$

Однако рассмотрение импликаций (3) уже выводит нас за пределы языка $Я_1$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, ДАН, 214, № 1 (1974). [2] А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 42 (1954). [3] А. А. Марков, Вестн. Московск. унив., № 2 (1970).