

Л. Л. ЭСАКИА

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ КРИПКЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 V 1973)

В последнее время в исследованиях, связанных с интуиционистским исчислением и его расширениями (такими, как исчисление задач Колмогорова, исчисление со слабым законом исключенного третьего), стали широко использоваться модели Крипке; с их же помощью формулируется семантика подавляющего большинства модальных и временных систем. В наших построениях, осуществленных под влиянием работ ^(1, 2) и расширяющих теорию двойственности М. Стоуна ⁽³⁾ на брауэровы структуры ⁽⁴⁾ и алгебры с замыканием ⁽⁴⁾, мы используем топологические модели Крипке.

1. Совершенные модели Крипке. Пусть $\mathcal{X}$ — пространство Стоуна (0-мерный компакт), $2^{\mathcal{X}}$ — пространство замкнутых (непустых) множеств пространства $\mathcal{X}$ с вейторисовой топологией ⁽⁵⁾. Очевидно, что любое бинарное отношение R , определенное на $\mathcal{X}$, для которого множества $R(x) = \{y: R(x, y)\}$, $x \in \mathcal{X}$, являются непустыми и замкнутыми в пространстве $\mathcal{X}$, порождает (или может рассматривать как) отображение $\rho: \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{X}}$, $\rho(x) = R(x)$, пространства $\mathcal{X}$ в пространстве $2^{\mathcal{X}}$. Отношение R назовем совершенным, если совершенно соответствующее отображение ρ .

Определение 1. Модель Крипке $\langle \mathcal{X}, R \rangle$, т. е. непустое множество $\mathcal{X}$ («миров») с отношением предпорядка R (отношение достижимости) назовем совершенной, если $\mathcal{X}$ — пространство Стоуна, а R — совершенное отношение на $\mathcal{X}$. (Обозначение $R(x, y)$ будет чередоваться с более привычными $x \leq y$ без специальных оговорок.)

Определение 2. Пусть $\langle \mathcal{X}, \leq \rangle$, $\langle \mathcal{X}', \leq' \rangle$ — предупорядоченные множества; отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ назовем сильно изотонным, если

$$f(y) \geq' x \Leftrightarrow (\exists y') (y \leq y' \wedge f(y') = x) \quad (1)$$

для любых $y \in \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}'$.

Легко убедиться, что каждое сильно изотонное отображение f является изотонным (т. е. $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y)$) и что если f — сюръекция, то сильная изотонность означает, что f — сильный (или факторный) гомоморфизм в смысле теории моделей.

Категорию совершенных моделей Крипке и непрерывных, сильно изотонных отображений обозначим K_2 ; выделим ее полную подкатегорию K_1 (соответственно K_0), ограничившись моделями $\langle \mathcal{X}, R \rangle$, у которых R — порядок (соответственное отношение равенства).

Скажем, что подмножество $A (\subseteq \mathcal{X})$ предупорядоченного множества $\langle \mathcal{X}, \leq \rangle$ есть верхний конус, если из $x \in A$ и $x \leq y$ следует $y \in A$. Понятие нижнего конуса определяется дуально. (Слово «верхний» ради краткости будет опускаться.)

Замечание. Известно, что «мостом», связывающим интуиционистское исчисление с моделями Крипке является понятие вынуждения (forcing ⁽⁶⁾); технически с каждой формулой ассоциируется монотонное отображение W модели Крипке $\langle \mathcal{X}, \leq \rangle$ в множество истинностных значений $\{0, 1\}$ или конус $A = \{x \in \mathcal{X}: W(x) = 1\}$ модели $\langle \mathcal{X}, \leq \rangle$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство Стоуна, R — предпорядок на $\mathfrak{X}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- I. $\langle \mathfrak{X}, R \rangle$ — совершенная модель Крипке;
- II. а) $R^{-1}(x) = \{y: R(y, x)\}$ замкнуты ($x \in \mathfrak{X}$),
 б) наименьшее замкнутое множество, содержащее конус, само является конусом,
 в) наименьший конус, содержащий замкнутое множество, замкнут;
- III. а) $R(x)$ замкнуты,
 б) для любого открытого множества $A \subseteq \mathfrak{X}$ множества $\{x: R(x) \cap A \neq \emptyset\}$, $\{x: R^{-1}(x) \subseteq A\}$ открыты;
- IV. а) $R(x)$ замкнуты,
 б) наименьший конус, содержащий открыто-замкнутое множество, открыто-замкнут.

Учитывая, что тематически теореме 1 можно отнести к теории многозначных отображений топологических пространств (см. ⁽⁷⁾) и указанную там литературу), ограничимся следующим замечанием. Нетрудно проверить, что утверждение IIб (соответственно, IIв) можно записать в виде $\forall X \quad RcRX = cRX$ (соответственно $\forall X \quad cRcX \subseteq RcX$), где c — оператор замыкания пространства $\mathfrak{X}$. Включение $RcRX \subseteq cRX$ равносильно $RcX \subseteq cRX$. Действительно, пусть $RcRX \subseteq cRX$; так как $X \subseteq RX$ (рефлексивность R), то $cX \subseteq cRX$ и, очевидно, $RcX \subseteq cRX$. Обратно, заменяя X на RX в $RcX \subseteq cRX$ и используя $RRX \subseteq RX$ (транзитивность R), получаем $RcRX \subseteq cRX$. Аналогично можно показать, что $cRcX \subseteq RcX \Leftrightarrow cRX \subseteq RcX$. Таким образом, условия IIб и IIв в совокупности равносильны следующему полезному условию коммутации c и R : $RcX = cRX$.

Пусть $\langle \mathfrak{X}, R \rangle \in \text{Ob} K_2$, E — отношение эквивалентности на $\mathfrak{X}$, индуцирующее компактное разбиение $\mathfrak{X}$, т. е. разбиение на компактными классами эквивалентности: $x|_E = E(x) = \{y: E(x, y)\}$, $x \in \mathfrak{X}$, и такое, что если A — конус, то $\cup \{x|_E: x \in A\}$ (насыщение A по E) является конусом в $\langle \mathfrak{X}, R \rangle$. Снабдим фактор-множество $\mathfrak{X}|_E$ фактор-топологией и предпорядком

$$R_E(x|_E, y|_E) \Leftrightarrow (\exists x', y') (x' \in x|_E \& y' \in y|_E \& R(x', y')).$$

Используя свойства топологии пространства $\mathfrak{X}$, совершенность предпорядка R и свойства разбиения, можно показать, что $\langle \mathfrak{X}|_E, R_E \rangle$ — совершенная модель Крипке; назовем ее фактор-моделью модели $\langle \mathfrak{X}, R \rangle$. В связи с теоремой 3^о (см. ниже) отметим следующий специальный случай. Пусть $\langle \mathfrak{X}, R \rangle \in \text{Ob} K_2$; поскольку R совершенно то разбиение, индуцируемое отношением эквивалентности $E(x, y) \Leftrightarrow R(x, y) \& R(y, x)$, компактно и конусы насыщены по E ; кроме того, R_E — порядок на $\mathfrak{X}|_E$; таким образом, имеем $\langle \mathfrak{X}|_E, R_E \rangle \in \text{Ob} K_1$.

2. Брауэровы структуры и алгебры с замыканием.

Определение 3. Брауэрова алгебра $\langle T, \vee, \wedge, \rightarrow, 0 \rangle$ (см. ⁽⁴⁾) или более подробно ⁽⁸⁾, где предпочитается термин «псевдобулева алгебра») есть дистрибутивная структура с наименьшим элементом 0 и с операцией $\rightarrow$, удовлетворяющей условию $a \wedge c \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b$. Примем a^- в качестве сокращения для $a \rightarrow 0$, $a \equiv T$.

Обозначим через L_1 категорию брауэровых алгебр и брауэровых (т. е. сохраняющих все сигнатурные операции) гомоморфизмов. Ясно, что категория L_0 булевых алгебр будет полной подкатегорией L_1 .

Определение 4. Алгебра с замыканием $\langle B, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, * \rangle$ ^(4, 8) есть булева алгебра $\langle B, \vee, \wedge, \rightarrow, 0 \rangle$ с операцией замыкания $*$:

$$a = a^*, a^{**} = a, (a \vee b)^* = a^* \vee b^*, 0^* = 0 \quad \forall a, b \in B.$$

Дуальную операцию a^{*-} обозначим через a^0 .

Пусть L_2 — категория алгебр с замыканием и гомоморфизмов.

Сопоставим каждой алгебре $B \in \text{Ob} K_2$ брауэрову алгебру $T(B) = \{a^0: a \in B\}$ всех открытых элементов B (⁽⁴⁾, стр. 218), гомоморфизму $h: B \rightarrow B'$,

$h \in \text{Mor } L_2$, — его сужение на $T(B)$, получим ковариантный функтор $\psi: L_2 \rightarrow L_1$.

Теорема 2. *Функтор ψ обладает левым сопряженным (вполне универсальным) функтором φ .*

Пусть T — брауэрова алгебра; существует алгебра с замыканием $B(T)$, содержащая (изоморфную копию) T в качестве подструктуры всех своих открытых элементов и порождаемая, как булева алгебра, множеством T . Усилив подходящим образом теорему 3.1 (⁽⁸⁾, стр. 153), можно показать, что соответствие $T \rightarrow B(T)$ порождает требуемый функтор $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$.

Для дальнейшего полезна простая

Лемма 1. *Пусть B — алгебра с замыканием $*$, $T = T(B)$, ∇_1, ∇_2 — ультрафильтры в B . Следующие утверждения равносильны:*

$$A) \nabla_1 \cap T \subseteq \nabla_2 \cap T;$$

$$B) \forall a \quad a \in \nabla_2 \Rightarrow a^* \in \nabla_1;$$

$$B) \forall a \quad a^0 \in \nabla_1 \Rightarrow a \in \nabla_2,$$

3. Теорема двойственности, кольца конусов. Наш основной результат выражает

Теорема 3^а. *Категория K_σ , $\sigma = 0, 1, 2$, двойственна (дуально эквивалентна в смысле Гротендика) категории L_σ , $\sigma = 0, 1, 2$.*

Случай $\sigma = 0$, соответствующий известному результату Стоуна (⁽³⁾), включен для однородности. Перейдем к описанию контравариантных функторов, устанавливающих двойственность, утверждаемую теоремой 3^а в случае $\sigma = 2$.

Пусть B — произвольная невырожденная алгебра с замыканием $*$. Определим модель $\langle X, R \rangle$ следующим образом: $X = \{\nabla: \nabla \text{ — ультрафильтр в } B\}$, $R(\nabla_1, \nabla_2) \Leftrightarrow \nabla_1 \cap T \subseteq \nabla_2 \cap T$, где $T = T(B) = \{a^0: a \in B\}$.

Известно, что X — 0-мерный компакт, если семейство $\{\pi(a)\}_{a \in B}$, где $\pi(a) = \{\nabla \in X: a \in \nabla\}$, принято за открытый баланс. Известно также, что π устанавливает изоморфизм между булевой алгеброй B и полем всех открыто-замкнутых множеств пространства X . Рефлексивность и транзитивность R очевидна.

Лемма 2.

$$\pi(a^*) = R^{-1}(\pi(a)) = \{\nabla \in X: R(\nabla) \cap \pi(a) = \emptyset\}. \quad (2)$$

Доказательство совершенности модели $\langle X, R \rangle$ можно теперь получить, воспользовавшись леммой 2 и теоремой 1. Таким образом, $\langle X, R \rangle \in \text{Ob } K_2$.

Пусть B_1, B_2 — алгебры с замыканием, а $\langle X_1, R_1 \rangle, \langle X_2, R_2 \rangle$ — соответствующие им модели. Пусть, кроме того, $h: B_1 \rightarrow B_2$, $h \in \text{Mor } L_2$. Определим отображение $f: X_2 \rightarrow X_1$ формулой $f(\nabla) = \{a \in B_1: h(a) \in \nabla\}$. Простая проверка показывает, что $f(\nabla)$ — ультрафильтр, т. е. что $f(\nabla) \in X_1$; отображение f непрерывно (⁽³⁾); для доказательства сильной изотонности f полезна.

Лемма 3. *Пусть $\langle X, R \rangle$ — совершенная модель Крипке, F — семейство замкнутых множеств, направленное включением $\ni$; тогда*

$$R^{-1}(\cap \{A: A \in F\}) = \cap \{R^{-1}A: A \in F\}.$$

Так как $h: B_1 \rightarrow B_2$ — гомоморфизм, то, используя лемму 2, имеем

$$f^{-1}R_1^{-1}(A) = R_2^{-1}f^{-1}(A) \quad (3)$$

для любого открыто-замкнутого множества $A \in X_1$. Условие (1) можно записать в форме

$$y \in f^{-1}R_1^{-1}(x) \Leftrightarrow y \in R_2^{-1}f^{-1}(x). \quad (1a)$$

Далее нетрудно установить, что (1a) равносильно условию:

$$y \in f^{-1}R_1^{-1}(\cap \{A: A \in F_x\}) \Leftrightarrow y \in R_2^{-1}f^{-1}(\cap \{A: A \in F_x\}), \quad (1b)$$

где F_x — семейство всех открыто-замкнутых множеств, содержащих x .

Опираясь на то, что f^{-1} коммутирует с Π , используя (3) и лемму 3, можно получить равенство (16) и тем самым условие сильной изотонности (1).

Теперь заданными будем считать $\langle X_1, R \rangle, \langle X_2, R_1 \rangle \in \text{Ob} K_2, f: X_1 \rightarrow X_2$ и $f \in \text{Mog } K_2$. Имеет место

Лемма 4. Если B_i — поле всех открыто-замкнутых множеств пространства $X_i, a^* = R_i^{-1}(a) \quad \forall a \in B_i$ и $h(b) = f^{-1}(b) \quad \forall b \in B_2$, то $\langle B, * \rangle \in \text{Ob} L_2, h: B_2 \rightarrow B_1$ и $h \in \text{Mog } L_2$.

Наконец, опираясь на теорему 2, можно построить функторы для случая $\sigma = 1$ теоремы 3^о.

Пусть алгебра с замыканием B получена из $\langle X, R \rangle$ способом, указанным в лемме 4; тогда, используя лемму 2 и теорему 1, можно показать, что элементы вида $a^0, a \in B$, суть открыто-замкнутые конусы модели $\langle X, R \rangle$ и что семейство $T = T(B)$ всех открыто замкнутых конусов $\langle X, R \rangle$ (назовем его кольцом конусов модели $\langle X, R \rangle$ образует брауэрову алгебру, причем $a \rightarrow b = \{x \in X: R(x) \cap a \subseteq b\}, a, b \in T$.

Более того, справедлива следующая

Теорема (представления). Каждая брауэрова структура изоморфна кольцу конусов подходящей модели $\langle X, R \rangle \in \text{Ob} K_1$.

В связи с вопросом Г. Биркгофа (⁴), проблема 75) выделим

Следствие. Полная брауэрова структура представима кольцом конусов модели $\langle X, R \rangle$ с экстремально несвязным X .

В заключение для иллюстрации предлагаемой теории двойственности отметим следующее утверждение.

Теорема 4. Структура конгруэнций алгебры с замыканием B (брауэровой алгебры T) изоморфна структуре всех замкнутых конусов соответствующей ей модели $\langle X, R \rangle \in \text{Ob} K_2 (\langle X, R \rangle \in \text{Ob} K_1)$; подалгебры алгебры B (алгебры T) находятся во взаимно однозначном соответствии с фактор-моделями модели $\langle X, R \rangle \in \text{Ob} K_2 (\langle X, R \rangle \in \text{Ob} K_1)$.

Результаты работы докладывались на семинаре А. А. Маркова в Московском государственном университете.

Институт кибернетики
Академии наук ГрузССР
Тбилиси

Поступило
24 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ B. Jónsson, A. Tarski, Am. J. Math., 73, 891 (1951). ² P. Halmos, Comp. Math., 12, 217 (1955). ³ M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., 41, 375 (1937). ⁴ G. Birkhoff, Lattice Theory (Third Ed.), N. Y., 1967. ⁵ E. Michael, Trans. Am. Math. Soc., 71, 152 (1951). ⁶ M. C. Fitting, Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, Amsterdam, 1969. ⁷ П. С. Александров, УМН, 15, в. 2, 25 (1960). ⁸ Е. Расёва, Р. Сикорский, Математика метаматематики, М., 1972.