Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 3

УДК 517.53 *МАТЕМАТИКА*

В. И. БЕЛЫЙ, В. М. МИКЛЮКОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОНФОРМНЫХ И КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПРЯМЫЕ ТЕОРЕМЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 V 1973)

Теоремы, устанавливающие точную оценку скорости полиномиальной аппроксимации функций, непрерывных на компактах комплексной плоскости и регулярных во внутренних точках этих компактов в зависимости от дифференциальных и непрерывных свойств функций (прямые теоремы конструктивной теории функций), в настоящее время получены только для простейших компактов. Наиболее сильные результаты в этом направлении принадлежат В. К. Дзядыку ([1]), Н. А. Лебедеву и Н. А. Широкову ([2]): прямые теоремы для замкнутых областей с гладкой и кусочно-гладкой границей, имеющей конечное число угловых особенностей; для континуумов с кусочно-гладкой границей того же типа. В то же время, как показывает известная теорема С. Н. Мергеляна ([3]), наиболее общим объектом, для которого возможна полиномиальная аппроксимация, являются замкнутые множества, дополнение которых до расширенной плоскости есть область, содержащая $z=\infty$. Такие множества будем называть множествами типа $\mathfrak{M}$.

Цель настоящей работы — получение новых прямых теорем на основе использования конформных и квазиконформных инвариантов и методов, разработанных в теории отображений.

1°. Пусть B — замкнутое множество комплексной плоскости, $\operatorname{diam} B>0$, дополнение которого Ω — односвязная область, содержащая $z=\infty$, и пусть $e\in\partial\Omega$ — произвольный простой конец Ω, z_e — главная точка e (см., например, ([4])). Обозначим через $s(x)$, $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\operatorname{diam} B$, открытые круговые дуги в Ω с центром в точке z_e и радиуса x, отделяющие e от ∞; $\{\gamma\}$ — семейство всех локально спрямляемых кривых $\gamma\subset\Omega$, отделяющих $s(\delta)$ и $s(\Delta)$, $0<\delta\leqslant\Delta\leqslant\operatorname{diam} B$, $\lambda(\{\gamma\})=\lambda(z_e;\,\delta,\Delta)$ — экстремальную длину $\{\gamma\}$ (см. ([5])).

Лемма 1. *Пусть K — континуум в круге $|w|<h$, содержащий точку $w=0$. Тогда*

$$M_2e^{-2\pi/\lambda}\leqslant \max_{w\in K}|w|\leqslant M_1e^{-2\pi/\lambda}, \tag{1}$$

где λ — экстремальная длина семейства локально спрямляемых кривых, отделяющих K от $|w|=h$, а константы M_1 и M_2 не зависят от $\operatorname{diam} K$.

Справедливость леммы легко следует из решения известной задачи Грёча (([5]), стр. 38).

Рассмотрим теперь конформное отображение $w=\Phi(z)$, $\lim\limits_{z\to\infty}(\Phi(z)/z)>$ >0 области Ω на $|w|>1$.

Теорема 1. *Для всяких $z_e\in\partial\Omega$ и $z\in s(\delta)$, $0<\delta<\Delta$,*

$$\max_{z\in s(\delta)}|\Phi(z_e)-\Phi(z)|\asymp e^{-\pi/\lambda(z_e;\,\delta,\,\Delta)}, \tag{2}$$

где Δ — постоянная, не зависящая от z и δ.

Приведем схему доказательства. Очевидно, достаточно убедиться в справедливости (2) для конформного отображения $w=\Phi_1(z)$,

$\Phi_1(\infty)=10i$, $\Phi_1(z_e)=0$ области Ω на верхнюю полуплоскость. В силу известных свойств экстремальной длины (см. ([5]))

$$\lambda(z_e;\,\delta,\Delta)=\lambda[\{\Phi_1(\gamma)\}]=\frac{1}{2}\lambda(\Gamma), \tag{3}$$

где Γ — семейство кривых, получаемое в результате сращивания кривых $\{\Phi_1(\gamma)\}$ и им симметричных относительно оси координат $\{\overline{\Phi_1(\gamma)}\}$: $\Gamma=\{\Phi_1(\gamma)+\overline{\Phi_1(\gamma)}\}$, что означает продолжение каждой кривой семейства $\{\Phi_1(\gamma)\}$ некоторой кривой семейства $\{\overline{\Phi_1(\gamma)}\}$ и наоборот. Пусть теперь Γ^* — семейство локально спрямляемых кривых, отделяющих кривые $\chi_\delta=\Phi_1(s(\delta))+\overline{\Phi_1(s(\delta))}$ и $\chi_\Delta=\Phi_1(s(\Delta))+\overline{\Phi_1(s(\Delta))}$. Поскольку χ_δ и χ_Δ симметричны относительно действительной оси, то нетрудно проверить, что $\lambda(\Gamma^*)=\lambda(\Gamma)$. Вследствие равномерной непрерывности функции $\Phi_1(z)$ на $\overline{\Omega}$ при фиксированном $\Delta>0$ существуют такие константы a и A, не зависящие от z_e и e, что

$$0<a\leqslant\min_{z\in s(\Delta)}|\Phi_1(z)|\leqslant\max_{z\in s(\Delta)}|\Phi_1(z)|\leqslant A<\infty. \tag{4}$$

Обозначим через $\lambda_A(z_e;\,\delta)$ экстремальную длину семейства кривых (здесь и далее локально спрямляемых), разделяющих χ_δ и $|w|=A$, а через $\lambda_0(z_e;\,\delta)$ — разделяющих χ_δ и $|w|=a$. Поскольку с расширением семейства кривых их экстремальная длина не возрастает, то

$$\lambda_A(z_e;\,\delta)\leqslant\lambda(\Gamma)=\lambda(\Gamma^*)=2\lambda(z_e;\,\delta,\Delta) \tag{5}$$

и аналогично

$$2\lambda(z_e;\,\delta,\Delta)\leqslant\lambda_a(z_e;\,\delta). \tag{6}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\lambda_A(z_e;\,\delta)\leqslant\lambda(z_e;\,\delta,\Delta)\leqslant\frac{1}{2}\lambda_a(z_e;\,\delta). \tag{7}$$

Пользуясь неравенством (7) и применяя лемму 1 к континууму, ограниченному кривой χ_δ, соответственно в кругах радиуса a и A, получим

$$C_2e^{-\pi/\lambda(z_e;\,\delta,\,\Delta)}\leqslant C_2e^{-2\pi/\lambda_a(z_e,\,\delta)}\leqslant\max_{z\in s(\delta)}|\Phi_1(z)\leqslant C_1e^{-2\pi/\lambda_A(z_e;\,\delta)}\leqslant C_1e^{-\pi/\lambda(z_e;\,\delta,\,\Delta)},$$

$$\max_{z\in s(\delta)}|\Phi_1(z)-\Phi_1(z_e)|=\max_{z\in s(\delta)}|\Phi_1(z)|\asymp e^{-\pi/\lambda(z_e;\,\delta,\,\Delta)},$$

что эквивалентно утверждению теоремы 1.

Следствие 1. *Соотношение* (2) *остается в силе, если вместо* $z_e\in\partial\Omega$ *взять* $z_0\in\Omega$ *и* δ, *удовлетворяющее условию* $\rho(z_0,B)\leqslant\delta\leqslant\Delta$.

Следствие 2. *Если* $\partial\Omega$ *такова, что искажение расстояния* $|z_e-z|$, $z_e\in\partial\Omega$, $z\in s(\delta)$ *при отображении* $w=\Phi(z)$ *имеет локально один и тот же порядок, то*

$$|\Phi(z)-\Phi(z_e)|\asymp e^{-\pi/\lambda(z_e;\,\delta,\,\Delta)}, \tag{8}$$

где $z\in s(\delta)$.

Границы $\partial\Omega$, удовлетворяющие условию следствия 2, имеют достаточно общий характер и могут быть описаны геометрическими терминами. В частности, этому условию удовлетворяют ограниченные квазиконформные кривые. Пусть L — замкнутая жорданова кривая, $\infty\notin L$. Зафиксируем произвольную точку $z^*\in L$. Если z_1, z_2, $z_3\in L$ — произвольные последовательные точки дуги $L-z^*$, то условие

$$|z_1,z^*,z_2,z_3|=\frac{|z_1-z_2|\,|z^*-z_3|}{|z_1-z_3|\,|z^*-z_4|}\leqslant C<\infty \tag{9}$$

является необходимым и достаточным, чтобы L была квазиконформной кривой (см. ([5])). Имеются также более общие условия, обеспечивающие выполнение следствия 2 ([6, 7]).

Отметим, что утверждение следствия 2 может быть получено непосредственно, без теоремы 1.

2°. Результаты п. 1° позволяют доказать прямые теоремы теории функций комплексного переменного на множествах, граница которых может иметь бесконечное число угловых точек. Для этого нам потребуется ввести метрическую характеристику криволинейных секторов кругового кольца, обобщающую понятие раствора сектора кольца. Пусть $z\in\overline{\Omega}$, $0<\delta\leqslant\Delta$. Рассмотрим функцию

$$A(z,\delta,\Delta)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\lambda(z,\delta,\Delta)\ln\frac{\Delta}{\delta}.$$

Если $\partial\Omega$ — жорданова спрямляемая кривая, имеющая одинаковый порядок дуги и хорды, то она является квазиокружностью в силу (9), и, применяя следствие 2, легко установить, что для всяких точек z, $\zeta\in\Omega$, $|z-\zeta|\leqslant\Delta$,

$$A(z,|z-\zeta|,\Delta)=\alpha(z,u,\Delta)+\frac{\varepsilon(z,\zeta,\Delta)}{\ln u},$$

где $u=|\Phi(z)-\Phi(\zeta)|$, $\alpha(z,u,\Delta)$ — положительная функция от z и u, а $\varepsilon(z,\zeta,\Delta)\asymp1$. Поскольку $\Delta=\mathrm{const}$, то в тех случаях, когда нет надобности указать его значение, будем писать $\alpha(z,u)$ вместо $\alpha(z,u,\Delta)$. В случае произвольной квазиконформной кривой $|z-\zeta|$ в (10) должно быть заменено относительным расстоянием $d(z,\zeta)=\inf\operatorname{diam}l(z,\zeta)$, где inf берется по всем кривым $l(z,\zeta)\in\Omega$, соединяющим точки z и ζ или отделяющим их от ∞.

Лемма 2. *Если граница $\partial\Omega$ области Ω является квазиокружностью и обладает круговым свойством, т. е. каждая точка $z\in\partial\Omega$ является вершиной некоторого кругового сектора радиуса $\Delta>0$ и раствора $\pi\theta_0$, $\theta_0=\mathrm{const}>$ >0, полностью лежащего в $\overline{\Omega}$, то при всех $z\in\partial\Omega$ и $u\geqslant t>0$*

$$\alpha(z,t)-\alpha(z,u)\leqslant A_1\frac{\ln(u/t)}{\ln(1/t)}. \tag{10}$$

Доказательство леммы 2 основано на свойствах экстремальных длин

Функция $\alpha(z,u)$ удобна для описания локальных свойств границы В частности, если $z\in\partial B$ и существует $\lim\limits_{u\to0}\alpha(z,u)=\alpha(z,0)$, то в точке z имеется внешний угол раствора $\pi\alpha(z,0)$.

Теорема 2. *Пусть B — замкнутая область типа $\mathfrak{M}$, граница которой L есть жорданова кривая, удовлетворяющая условиям: 1) L имеет одинаковый порядок длины и хорды; 2) существует такое ε, $0<\varepsilon<1$, что при всех $x\in[1-\varepsilon,1]$, $z\in L$ и $u>0$*

$$\alpha(z,u)-\alpha(z,u^x)\leqslant A_1/\ln(1/u);$$

3) L обладает круговым свойством во внешности B.

Тогда для всякой функции $f(z)$, непрерывной на B и регулярной внутри B, и всяком натуральном n существует такой полином $P_n(z)$ степени n, что при всех $z\in L$

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_2\omega[\rho_{1+1/n}(z)],$$

где $\omega(t)=\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции f, $\rho_{1+1/n}(z)$ — расстояние от точки $z\in L$ до линии уровня $L_{1+1/n}=\{z\colon |\Phi(z)|=1+1/n\}$, A_2 — постоянная, не зависящая от z и n.

Доказательство основано на использовании аппроксимационных полиномов, введенных в работах ([1]) и ([2]), теоремы 1 и леммы 2. Частным случаем теоремы 2 является следующий результат.

Теорема 3. *Если функция $f(z)$ непрерывна на замкнутой выпуклой ограниченной области B и регулярна во внутренних точках B, то при* *каждом натуральном n существует полином $P_n(z)$ степени n, для которого*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_2\omega[\rho_{1+1/n}(z)],\quad z\in L.$$

Отметим, что теорема 2 допускает следующее усиление.

Теорема 4. *Пусть B — замкнутая область, удовлетворяющая тем же условиям, что и в теореме 1.*

Тогда для интеграла типа Коши, определяемого произвольной непрерывной на $L=\partial B$ функцией $f(\zeta)$ при каждом натуральном n найдется такой полином $P_n(z)$ степени n, что в каждой точке $z_0\in L$ и всех $z\in B\cap \cap U[z_0;\rho_{1+1/n}(z_0)]$ будет иметь место неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-P_n(z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L\cap U[z_0;\,{}^1/_2\rho_{1+1/n}(z_0)]}\frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z}d\zeta\right|+A_\zeta\omega[\rho_{1+1/n}(z_0)],$$

где $\omega(t)=\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции $f(\zeta)$ на L, а $U[z_0;{}^1/_2\rho_{1+1/n}(z_0)]=\{z:\ |z-z_0|\leqslant{}^1/_2\rho_{1+1/n}(z_0)\}$, A_ζ — постоянная, не зависящая от z, z_0, n.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
14 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Дзядык, Укр. матем. журн., 24, № 1, 3 (1972). [2] Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, Изв. АН АрмССР, Математика, 6, № 4, 311 (1971). [3] С. Н. Мергелян, УМН, 7, в. 2, 31 (1952). [4] Г. Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965. [5] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. [6] J. E. McMillan, Acta Math., 126, № 1–2, 121 (1971). [7] S. Rickman, Duke Math. J., 36, № 2, 387 (1969).