

П. Е. БЕРХИН

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
СОСТАВНОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 V 1973)

Дифференциальные операторы, имеющие в каждой точке наряду с комплексными действительные характеристические направления, получили название составных ^(1, 2). Некоторые плоские задачи для составных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x} P \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) u = f,$$

где P — эллиптический оператор, были поставлены и исследованы методами интегральных уравнений в работах ⁽¹⁻⁴⁾.

Пусть $S = R^n/Z^n$ — n -мерный тор, $V_\tau = (0, \tau) \times S$ — цилиндр с основанием S , а $S_i = \{i\} \times S$ — его сечение. Точки V_τ и S будем обозначать соответственно через (x_0, x) и $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = x_i + 1$, $i = 1, \dots, n$.

Ограничиваясь сначала периодическим по x_1, \dots, x_n случаем, рассмотрим на V_τ составное уравнение

$$Lu = D_0(D_0^2 + A)u + Gu = f, \quad (1)$$

где

$$Au = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij} D_j u)$$

— самосопряженный эллиптический оператор второго порядка с бесконечно дифференцируемыми на S коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$,

$$Gu = \sum_{|\alpha| \leq 2} g_\alpha(x_0, x) D^\alpha u, \quad g_\alpha \in C^\infty(\bar{V}_\tau),$$

а $D_k = \partial/\partial x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, $D^\alpha = D_0^{\alpha_0} \cdot D_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot D_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

В работе для уравнения (1) исследуется следующая краевая

Задача. Найти решение $u = u(x_0, x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{s_0} = u|_{s_\tau} = D_0 u|_{s_0} = 0. \quad (2)$$

Ниже используются хорошо известные пространства обобщенных функций Соболева $H_{k,l}(V_\tau)$ и $H_k(V_\tau) = H_{k,0}(V_\tau)$, получаемые пополнением множества $C^\infty(\bar{V}_\tau)$ по нормам

$$\|u\|_{k,l,\tau}^2 = \sum_{V_\tau} \int |D^\alpha u|^2 dV_\tau, \quad \alpha_0 \leq k, \quad |\alpha| \leq k+l.$$

Замкнутые подпространства элементов $H_k(V_\tau)$, $k \geq 2$, удовлетворяющих условию (2), обозначим через H_k^0 . Пусть также C_0^∞ есть множество гладких в \bar{V}_τ функций, удовлетворяющих условию (2).

Имеет место следующая

Лемма. Существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и функций из C_0^∞ верны априорные оценки

$$\|u\|_{2, \tau} \leq c \|Lu - \lambda u\|_{0, \tau}, \quad (3)$$

$$\|u\|_{k+3, \tau} \leq c_k \|Lu - \lambda u\|_{k, 1, \tau}, \quad k=0, 1, \dots \quad (4)$$

Постоянные c , c_k и λ_0 непрерывно зависят от коэффициентов оператора L и не возрастают с убыванием τ .

Теорема 1. Существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что задача (1), (2) для оператора $L' = L - \lambda$ с $\lambda \geq \lambda_0$ однозначно разрешима в пространствах $H_2(V_\tau)$, $H_{k+3}(V_\tau)$, $k=0, 1, \dots$, для любых правых частей из $H_0(V_\tau)$, $H_{k, 1}(V_\tau)$ соответственно.

Доказательство. Обозначим через H^0 одно из пространств H_2^0 или H_{k+3}^0 , $k=0, 1, \dots$, а через H — одно из пространств $H_0(V_\tau)$ или $H_{k, 1}(V_\tau)$, $k=0, 1, \dots$

Рассмотрим семейство операторов

$$L_\xi = D_0(D_0^2 + A) + \xi G, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

плотно определенных из H^0 в H . В случае $H^0 = H_2^0$ под L_ξ понимается замыкание его дифференциального выражения, рассматриваемого как оператор из $C_0^\infty \subset H_2^0$ в $H_0(V_\tau)$.

На основании леммы найдется число $\lambda > 0$ такое, что оценки (3), (4) выполняются для операторов $L_\xi - \lambda = L'_\xi$ с не зависящими от ξ константами. Поэтому, доказав существование ограниченного правого обратного M_0 к оператору L'_0 и заметив, что разность $L'_\xi - L'_0 = (\xi_2 - \xi_1)G$ непрерывным образом действует из H^0 в H , методом продолжения по параметру получим существование правого обратного $M = M_1$ к оператору $L' = L'_1$.

Пусть $\{\varphi_m(x)\}$ — полная система бесконечно дифференцируемых собственных функций оператора A на S . Если $f(x_0) \in C^\infty(J)$, где $J = [0, \tau]$, то

$$L'_0[f(x_0)\varphi_m(x)] = \varphi_m(x)Q_m(D_0)f(x_0). \quad (5)$$

Задача

$$Q_m(D_0)f(x_0) = g(x_0) \in C^\infty(J), \quad (6)$$

$$f(0) = f(\tau) = f'(0) = 0 \quad (7)$$

для обыкновенного дифференциального уравнения (6) всегда разрешима, так как соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение. Это следует из оценок (3), (4), равенства (5) и очевидного соотношения $f(x_0)\varphi_m(x) \in C_0^\infty$, если f удовлетворяет условиям (7).

Итак, $L'_0[C_0^\infty]$ содержит гладкие функции вида $g(x_0)\varphi_m(x)$ и поэтому плотно в H .

Последнее вместе с оценками (3), (4) доказывает существование правого обратного M_0 к оператору L'_0 .

Следствие. Если $f \in C^\infty(\bar{V}_\tau)$, то решение $u = H_2^0$ задачи (1), (2) есть функция из C_0^∞ .

Формально сопряженной к задаче (1), (2) является задача

$$L^*v = g, \quad (8)$$

$$v|_{s_0} = v|_{s_\tau} = D_0v|_{s_\tau} = 0, \quad (9)$$

которая заменой $t^* = \tau - t$ сводится к исходной. Выберем общее достаточно большое λ так, чтобы операторы $L - \lambda$ и $L^* - \lambda$, плотно определенные из H_2^0 и H_2^{*0} в $H_0(V_\tau)$, имели ограниченные правые обратные M и M^* . Здесь $H_2^{*0} \subset H_2(V_\tau)$ — подпространство элементов, удовлетворяющих условию (9).

Тогда задачи (1), (2) и (8), (9) для L и L^* из $H_2(V_\tau)$ в $H_0(V_\tau)$ соответственно эквивалентны уравнениям

$$u + \lambda Mu = Mf, \quad (10)$$

$$v + \lambda M^*v = M^*g. \quad (11)$$

Так как

$$(Mu, v)_{0, \tau} = (Mu, (L^* - \lambda)M^*v)_{0, \tau} = ((L - \lambda)Mu, M^*v)_{0, \tau} = (u, M^*v)_{0, \tau},$$

то M и M^* сопряжены как операторы в пространстве $H_0(V_\tau)$ и в силу известных теорем вложения они вполне непрерывны в нем.

Таким образом, задачи (1), (2) и (8), (9) эквивалентны паре сопряженных фредгольмовых уравнений. При этом все собственные функции уравнения (10) в силу следствия лежат в C_0^∞ , а для его разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий

$$(Mf, v)_{0, \tau} = (f, M^*v)_{0, \tau} = -\lambda(f, v)_{0, \tau} = 0$$

для всех решений v однородного уравнения (11), или, что то же самое, однородной задачи (8), (9). Аналогичные результаты имеют место и для второго уравнения. Следовательно, доказана

Теорема 2. *Задачи (1), (2) и (8), (9) образуют фредгольмову пару.*

Ниже указаны условия, гарантирующие единственность решения задачи (1), (2).

Теорема 3. *Для любого оператора L вида (1) существует $\tau_0 > 0$ такое, что при $\tau \leq \tau_0$ задача (1), (2) в V_τ безусловно и однозначно разрешима в соответствующих пространствах.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2, оценок (3), (4) и того факта, что постоянная $c(\tau)$ в неравенстве

$$\|u\|_{0, \tau} \leq c(\tau) \|u\|_{1, \tau}, \quad u \in H_2^0,$$

зависит от τ линейно.

Рассмотрением гармоник по собственным функциям оператора A получается также следующая

Теорема 4. *Пусть L имеет чисто композиционный вид,*

$$L = [D^0 + k(t)] [D_0^2 + b(t)D_0 + A + a(t)], \quad (12)$$

где действительные функции $k, b, a \in C^\infty(J)$ и $a(t) \leq 0$.

Тогда задача (1), (2) безусловно и однозначно разрешима в соответствующих пространствах.

Сформулируем некоторые результаты в неперриодическом случае.

Пусть $\mathcal{D}_\tau = (0, \tau) \times B$ — цилиндр в R^{n+1} , в сечении которого лежит ограниченная область $B \subset R^n$ с гладкой границей ∂B . B_τ и B_0 — верхнее и нижнее основания \mathcal{D}_τ . Условия (2) и (9) заменим соответственно на условия

$$u|_{B_0} = u|_{B_\tau} = D_0 u|_{B_0} = 0, \quad u|_\Gamma = 0, \quad (13)$$

$$v|_{B_0} = v|_{B_\tau} = D_0 v|_{B_\tau} = 0, \quad v|_\Gamma = 0, \quad (14)$$

где $\Gamma = (0, \tau) \times \partial B$ — боковая поверхность цилиндра.

Теорема 5. *Задачи (1), (13) и (8), (14) для операторов L и L^* из $H_2(\mathcal{D}_\tau)$ в $H_0(\mathcal{D}_\tau)$ образуют фредгольмову пару. Если τ мало, или L имеет вид (12), то для всякой правой части $f \in H_0(\mathcal{D}_\tau)$ существует единственное решение $u \in H_2(\mathcal{D}_\tau)$ задачи (1), (13).*

Если для $f \in H_{2,1}(\mathcal{D}_\tau)$ выполнены некоторые условия обращения в нуль на Γ , то для областей и операторов частного вида возможен подъем гладкости решения u .

Автор выражает благодарность А. М. Нахушеву за руководство работой.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
7 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. Hadamard. The Tohoku Math. J., 37, 133 (1933). ² А. В. Бицадзе, М. С. Салахитдинов, Сиб. матем. журн., 2, № 1, 7 (1961). ³ O. Sjöstrand. Ark. Mat. Astr. och Fys., 25A, № 24, 1 (1936). ⁴ Г. И. Эскин, Сиб. матем. журн., 3, № 6, 882 (1962).