Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 517.512.7 *МАТЕМАТИКА*

Н. Г. ТОМИН

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ К ВОПРОСАМ СХОДИМОСТИ РЯДОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 II 1973)

1. В заметке вещественный интерполяционный метод «средних» Ж. Лионса — Ж. Петре ([1], [2]) применяется к изучению поведения коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам (к.о.м.) в соответствующих пространствах с весом $L_{2,\rho}$. С любой системой к.о.м. естественным образом связаны пространства $W^m_{2,\rho}$, $m\geqslant 1$ целое, типа пространств С. Л. Соболева, но с различными весами на производные разных порядков. Приводится их характеристика в терминах принадлежности коэффициентов Фурье по соответствующей системе к.о.м. пространству l_2 со степенным весом. Интерполяция методом «средних» между $L_{2,\rho}$ и пространствами $W^m_{2\,\rho}$ приводит к шкале $B^{\gamma,q}_{2,\rho}$, $\gamma>0$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, пространств типа пространств О. В. Бесова ([3]) относительно полугрупп операторов в $L_{2,\rho}$, тесно связанных с абелевым методом суммирования рядов Фурье по соответствующей системе к.о.м. Получена характеристика пространств $B^{\gamma,q}_{2,\rho}$ в терминах коэффициентов Фурье.

Интерполяционный подход позволяет получить ряд новых фактов, а также многие известные результаты о коэффициентах Фурье по к.о.м.

2. Пусть (a,b) — промежуток в R^1, $L_2=L_2(a,b)$ — вещественное гильбертово пространство квадратично суммируемых на (a,b) функций с нормой $\|f\|_2=(\int\limits_a^b|f(x)|^2dx)^{1/2}$; вес $\rho=\rho(x)$ — положительная измеримая на (a,b) функция: $L_{2,\rho}=L_{2,\rho}(a,b)=\{f\,|\,\rho f\in L_2\}$ с нормой $\|f\|_{2,\rho}=\|\rho f\|_2$. В дальнейшем (a,b), ρ и некоторые связанные с ним величины фиксированы и имеют вид, отраженный в табл. 1.

В табл. 1 $\{p_n\}_0^\infty$ — ортонормированная полная система к.о.м. в $L_{2,\rho}$, p_n — многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом. Тип P соответствует многочленам Якоби $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$, α, $\beta>-1$, тип L — обобщенным многочленам Лагерра $\hat{L}_n^{(\alpha)}$, $\alpha>-1$, тип H — многочленам Эрмита $\hat{H}_n$. Весу ρ сопоставляем последовательность весов того же типа $\rho_j=u^j\rho$, $j\geqslant 0$ — целое (u определена в табл. 1). Соответствующую систему к.о.м. обозначаем $\{p_{n,j}\}_{n=0}^\infty$; для $f\in L_{2,\rho_j}$

$$c_{n,j}(f)=\int\limits_a^b f(x)p_{n,j}(x)\rho_j^2(x)\,dx;\quad \rho=\rho_0,\quad p_n=p_{n,0},\quad c_n(f)=c_{n,0}(f).$$

В основе наших рассмотрений лежит следующее характерное для к.о.м соотношение (см. ([4])):

$$p'_{n,j}=h_{n,j}n^\nu p_{n-1,j+1},\quad n\geqslant 1;\tag{1}$$

штрих означает дифференцирование по x, определение ν и $h_{n,j}$ см. в

Таблица 1

Тип к. о. м.	a	b	ρ	p_n	h_n	u	ν
P	-1	$+1$	$(1-x)^{\alpha/2}(1+x)^{\beta/2}$ $\alpha,\beta>-1$	$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$	$\left(1+\frac{\alpha+\beta+1}{n}\right)^{1/2}$	$(1-x^2)^{1/2}$	1
L	0	$+\infty$	$x^{\alpha/2}e^{-x/2}$ $\alpha>-1$	$\hat{L}_n^{(\alpha)}$	1	$x^{1/2}$	$1/2$
H	$-\infty$	$+\infty$	$e^{-x^2/2}$	$\hat{H}_n$	$2^{1/2}$	1	$1/2$

табл. 1 ($h_n=h_{n,0}$; $h_{n,j}$ получается из h_n при замене в таблице ρ на ρ_j). Очевидно, $\inf\limits_n h_{n,j}>0$, $\sup\limits_n h_{n,j}<\infty$.

3. Через D' обозначаем пространство вещественных распределений на (a,b). Пусть $W^m_{2,\rho}=\{f\,|\,f^{(j)}\in L_{2,\rho_j},\ j=0,1,\ldots,m\}$, $m\geq 1$ целое, с нормой $\|f\|_{2,\rho;m}=(\sum\limits_{j=0}^m\|f^{(j)}\|_{2,\rho_j})^{1/2}$; производные понимаются в смысле D'.

Лемма 1. *Если* $f\in W^m_{2,\rho}$, $n\geq 0$, $1\leq j\leq m$, *то*

$$c_{n,j}(f^{(j)})=c_{n+j}(f)\prod_{k=1}^{j}(n+k)^{\nu}h_{n+k,j-k}.$$

Лемма 2. *Пусть* $f\in L_{2,\rho}$, $m\geq 1$. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) $f\in W^m_{2,\rho}$; 2) $f,f',\ldots,f^{(m-1)}$ *абсолютно непрерывны на любом промежутке* (a_1,b_1), $a_1>a$, $b_1<b$, *и* $f^{(m)}\in L_{2,\rho_m}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2m\nu}|c_n(f)|^2<\infty$. *При этом нормы*

$$\|f\|_{2,\rho;m},\quad \|f\|_{2,\rho}+\|f^{(m)}\|_{2,\rho_m}\ \text{и}\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2m\nu}|c_n(f)|^2\right)^{1/2}$$

эквивалентны на $W^m_{2,\rho}$.

Доказательство лемм 1 и 2 проводится с учетом формулы (1) и возможности почленного дифференцирования в D' рядов Фурье по к.о.м. Частные случаи лемм 1 и 2 получены С. З. Рафальсоном [5–8] по существу тем же способом.

4. Ниже через $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$, $0<\theta<1$, $1\leq q\leq\infty$, обозначаем интерполяционный метод «средних» Ж. Лионса – Ж. Петре [1, 2], а через $B_2^{\gamma,q}=B_2^{\gamma,q}(a,b)$ – пространства О. В. Бесова [3]. Известны соотношения $B_2^{\gamma,q}=(L_2, W_2^m)_{\gamma/m,q}$, где $m>0$ целое, $0<\gamma<m$, $1\leq q\leq\infty$; W_2^m – пространства С. Л. Соболева на (a,b). Аналогичным образом вводим пространства $B^{\gamma,q}_{2,\rho}=(L_{2,\rho},W^m_{2,\rho})_{\gamma/m,q}$, $0<\gamma<m$, $1\leq q\leq\infty$. В силу теоремы о реитерации [1] пространства $B^{\gamma,q}_{2,\rho}$ не зависят от m с точностью до эквивалентности соответствующих норм. Согласно свойствам вложения пространств «средних» [1] $B^{\gamma,q}_{2,\rho}\subset B^{\gamma,p}_{2,\rho}$, $q<p$, и $B^{\gamma,q}_{2,\rho}\subset B^{\delta,p}_{2,\rho}$, $\gamma>\delta$, с соответствующими неравенствами для норм.

Следующая теорема дает достаточные условия принадлежности классу $B^{\gamma,q}_{2,\rho}$ в терминах обычной интегральной гладкости.

Теорема 1. *Пусть* $m\geq 1$ *целое*, $0<\gamma<m$, $1\leq q\leq\infty$, *и* $l\rho, l\rho_m, l'\rho_m,\ldots$ $\ldots, l^{(m)}\rho_m$ *ограничены на* (a,b). *Тогда из* $f\in B_2^{\gamma,q}$ *следует* $lf\in B^{\gamma,q}_{2,\rho}$.

Приведем характеристику пространств $B_{2,\rho}^{\gamma,q}$ на языке теории полугрупп. Для $k\geqslant 1$ целого, $t>0$, $f\in L_{2,\rho}$, полагаем

$$G_{\rho,k}(t)f=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-tn^{\nu k})c_n(f)p_n=\int_a^b Q_{t,\rho,k}(\cdot,y)f(y)\,dy.$$

В важном случае $\nu k=1$ известны явные выражения для ядер

$$Q_{t,\rho,k}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-tn^{\nu k})p_n(x)p_n(y)\in L_{2,\rho}\times L_{2,\rho}$$

(см. [9]). При фиксированном k $G_{\rho,k}(t)$, $t>0$,— сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа операторов в $L_{2,\rho}$ класса (C_0) (см. [10]).

Следующая теорема получается применением результатов Ж. Лионса и Ж. Петре [1] (через I_ρ обозначаем единичный оператор в $L_{2,\rho}$).

Теорема 2. *Пусть $\gamma>0$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Следующие утверждения эквивалентны*: 1) $f\in B_{2,\rho}^{\gamma,q}$; 2) *пусть $k\geqslant 1$, $m\geqslant 1$ целые, $km>\gamma$, и конечна величина*

$$\|f\|_{2,\rho;\gamma,q}^{(k,m)}=\|f\|_{2,\rho}+\left(\int_0^\infty (t^{-\gamma/k}\|[G_{\rho,k}(t)-I_\rho]^m f\|_{2,\rho})^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

с заменой при $q=\infty$ второго слагаемого на $\sup_{t>0} t^{-\gamma/k}\|[G_{\rho,k}(t)-I_\rho]^m f\|_{2,\rho}$. При этом нормы $\|f\|_{2,\rho;\gamma,q}^{(k,m)}$ эквивалентны между собой и норме $B_{2,\rho}^{\gamma,q}$.

Следующая теорема позволяет при использовании пространств $B_{2,\rho}^{\gamma,q}$ ограничиваться случаем $0<\gamma\leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть $m\geqslant 1$, $k\geqslant 1$ целые, $0<\theta<1$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Следующие утверждения эквивалентны*:

$$1)\ f\in B_{2,\rho}^{m+k\theta,q};\qquad 2)\ f\in W_{2,\rho}^m,\quad f^{(m)}\in B_{2,\rho_m}^{k\theta,q}.$$

5. Пусть l_2^λ, $\lambda\in R^1$,— пространство последовательностей $\{a_n\}_0^\infty$, для которых конечна норма $(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2\lambda}|a_n|^2)^{1/2}$. Для $f\in L_{2,\rho}$ полагаем $T_\rho f=\{c_n(f)\}_0^\infty$. Оператор T_ρ линейно и гомеоморфно отображает: 1) $L_{2,\rho}$ на l_2 в силу теоремы Рисса — Фишера, 2) $W_{2,\rho}^m$, $m\geqslant 1$ целое, на $l_2^{m\nu}$ в силу леммы 2 и, следовательно, в силу интерполяционной теоремы [1], 3) $B_{2,\rho}^{\gamma,q}$ на $(l_2,l_2^{m\nu})_{\gamma/m,q}$, $0<\gamma<m$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Последний результат позволяет описать пространства $B_{2,\rho}^{\gamma,q}$ в терминах коэффициентов Фурье. Всюду далее $\gamma>0$, $\delta=\nu\gamma$, $1/r=|1/2-1/q|$.

Теорема 4. *Если $f\in B_{2,\rho}^{\gamma,q}$, $1\leqslant q<2$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^q n^{q(\delta-1/r)}<\infty.$$

В случае $\delta=1/r$ получаем достаточное условие для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^q$, $1\leqslant q<2$. В частности, при $q=1$, $\delta=1/2$, теорема 4 превращается в аналог для к.о.м. классической теоремы С. Н. Бернштейна — О. Саса [11] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Следствие. *В каждом из перечисленных ниже случаев ряд Фурье функции $f\in B_{2,\rho}^{\gamma,1}$ по соответствующей системе к.о.м. сходится абсолютно и равномерно на $X\subset(a,b)$*:

1) $\gamma=1/2$, X — *любой компакт в* (a, b);

2) *для многочленов Якоби*, $\alpha, \beta>-1$: $\gamma=\max(1/2, 1+\max(\alpha, \beta))$, $X=(-1, 1)$;

3) *для обобщенных многочленов Лагерра*, $\alpha>-1$: $\gamma=\max(1/2, 1+\alpha)$, $X=(0, \omega]$, $\omega>0$.

Следующая теорема, обобщающая теорему 4, при $q=1$ является аналогом для рядов Фурье по к.о.м. результата А. Берлинга ([12]) (см. также ([13])), полученного им для интегралов. Фурье.

Теорема 5. *Пусть* $1\leqslant q<2$. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) $f\in B^{\gamma,q}_{2,\rho}$; 2) *существует неубывающая последовательность положительных чисел* $\{\eta_n\}_1^\infty$ *такая, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r\delta-1}\eta_n^{-r}<\infty$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\eta_n c_n(f)|^2<\infty$.

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f\in B^{\gamma,2}_{2,\rho}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2\delta}|c_n(f)|^2<\infty$.

В условиях теорем 7 и 8 $f\in L_{2,\rho}$,

$$E_{n,\rho}(f)=\min_{a_k}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k x^k\right\|_{2,\rho}=\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\right)^{1/2}$$

— наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени $\leqslant n-1$ в норме $L_{2,\rho}$.

Теорема 7. *Пусть* $2<q<\infty$. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) $f\in B^{\gamma,q}_{2,\rho}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E^q_{n,\rho}(f)n^{q\delta-1}<\infty$. *При выполнении любого из этих условий справедливо утверждение*; 3) *для любой неубывающей последовательности* $\{\eta_n\}_1^\infty$ *такой, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-r\delta-1}\eta_n^r<\infty$ *имеет место неравенство* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\eta_n c_n(f)|^2<\infty$.

Теорема 8. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) $f\in B^{\gamma,\infty}_{2,\rho}$; 2) $E_{n,\rho}(f)=O(n^{-\delta})$, $n\to\infty$; 3) *для любой неубывающей последовательности* $\{\eta_n\}_1^\infty$ *такой, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2\delta-1}\eta_n^2<\infty$, *следует* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\eta_n c_n(f)|^2<\infty$.

Эквивалентность условий 1) и 2) теоремы 8 получена другим способом С. З. Рафальсоном ([5]). Для некоторых систем к.о.м. условия 2) теорем 6 и 8, а, следовательно, и соответствующие пространства $B^{\gamma,q}_{2,\rho}$ охарактеризованы в других терминах в ([14], [5–8], [15]).

Автор выражает благодарность М. З. Соломяку за постоянное внимание к настоящей работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
27 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Lions, J. Peetre, Publ. Math., JHES, 19, 5 (1964). [2] J. Peetre, Rich. Mat., 12, 1963. [3] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. [4] Г. Сегё, Ортогональные многочлены, М., 1962. [5] С. З. Рафальсон, Вестн. Ленингр. унив., 7 (1969). [6] С. З. Рафальсон. Изв. высш. учебн. завед., матем., 7 (1968). [7] Там же, 11 (1971). [8] Там же, 4 (1968). [9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье), М., 1967. [10] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., 1962. [11] Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. М., 1961. [12] A. Beurling, Ann. Inst. Fourier, 14 (1964). [13] F. Peetre, Acta Sci. Math. (Szeged.), 28 (1967). [14] Г. В. Жидков, ДАН, 169, № 5 (1966). [15] Г. Фройд, ДАН, 201, № 6 (1971).