Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 4

УДК. 517.9 МАТЕМАТИКА

М. Б. ВЕЛИЕВ, М. Г. ГАСЫМОВ

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 IV 1973)

1. Постановка задачи. Рассмотрим граничную задачу, порожденную системой дифференциальных уравнений

$$-y_i''+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(x)\,y_j+m_i^2y_i=\lambda^2y_i,\qquad i=1,\ldots,n,\qquad 0\leqslant x<\infty,\tag{1}$$

и граничными условиями

$$y_1(0)=y_2(0)=\ldots=y_n(0)=0,\tag{2}$$

в пространстве вектор-функций с n компонентами из $\mathscr{L}_2(0,\ \infty)$.

Пусть в дальнейшем выполняются следующие условия:

а) диагональная матрица $M=\{\delta_{ij}m_i^2\}$ постоянна, неотрицательна, и если $m^2=\max\limits_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}(m_i^2-m_j^2)$, то $m\neq0$;

б) вещественнозначные функции $q_{ij}(x)$, $i,\ j=1,\ldots,n$, определены и непрерывны на полуоси; $[0,\ \infty)$;

в) при каждом $x\geqslant0$ матрица $Q(x)=\{q_{ij}(x)\}$ эрмитова;

г) $x\|Q(x)\|\exp\,(mx)\in\mathscr{L}_1(0,\ \infty)$. (3)

В данной работе решается обратная задача теории рассеяния для самосопряженной граничной задачи (1), (2). При $M=0$ эта задача решена в [1]. В рассматриваемом случае потенциальная матрица-функция $Q(x)+M$ не исчезает на бесконечности и, очевидно, имеет конечный предел. Такие уравнения встречаются в многоканальной задаче квантовой теории рассеяния частиц с отличными от нуля внутренними энергиями (см., например, [2, 3]).

В книге [3] изучаются некоторые свойства S-матрицы граничной задачи типа (1), (2) с финитными $q_{ij}(x)$ и ставится обратная задача теории рассеяния для таких систем (см. гл. VIII, стр. 352).

2. Специальные решения. Рассмотрим матричное уравнение

$$-Y''+Q(x)\,Y+MY=\lambda^2Y,\qquad 0\leqslant x<\infty.\tag{4}$$

Уравнение (4) имеет аналитическое в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ и непрерывное вплоть до вещественной оси матричное решение $F(x,\ \lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty}F(x,\ \lambda)f^{-1}(x,\ \lambda)=I,$$

и существует матричная функция $K(x,\ t)$ порядка $n\times n$ такая, что

$$F(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^\infty K(x,t)f(t,\lambda)\,dt;$$

здесь $f(x,\ \lambda)=\exp\,[i(\lambda^2I-M)^{1/2}x]$ есть решение уравнения (4) при $Q(x)\equiv0$ и $\operatorname{Im}(\lambda^2I-M)^{1/2}>0$, если $\operatorname{Im}\lambda>0$. Матрица-функция $K(x,\ t)$ имеет непрерывные частные производные K_x', K_t' и справедливы оценки (5), (6) из работы [4]. Матрицы $K(x,t)$ и $Q(x)$ связаны между собой равенством

$$Q(x)=-2K'(x,\ x).\tag{5}$$

ными условиями $\Phi(0,\lambda)=0$, $\Phi'(0,\lambda)=I$.

3. О спектре задачи (1), (2). Нетрудно показать, что ядро резольвенты граничной задачи (1), (2) при $\operatorname{Im}\lambda>0$ имеет вид

$$R(x,t,\lambda)=\begin{cases} F(x,\lambda)F^{-1}(0,\lambda)\widetilde{\Phi(t,\lambda)}, & t<x,\\ \Phi(x,\lambda)\widetilde{F^{-1}(0,\lambda)}F(x,\lambda), & t>x.\end{cases}$$

Для простоты изложения в дальнейшем рассмотрим случай $n=2$, $m_1=0$, $m_2=m$.

Теорема. *Граничная задача* (1), (2) *имеет*: а) *лишь конечное число отрицательных собственных значений* $-\mu_1^2, -\mu_2^2, \dots, -\mu_q^2$; б) *лишь конечное число однократных собственных значений* $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2$ из $(0, m^2)$, *которые являются квадратами общих нулей элементов второго столбца матрицы* $F(0, \lambda)$; в) *однократный непрерывный спектр на* $[0, m^2)$; г) *двухкратный непрерывный спектр на* $[m^2, \infty)$.

Формулировка аналога этой теоремы в случае произвольного n очевидна. Структура спектра граничных задач (1), (2) при финитных потенциалах изучена также в работах ([5], [6]) и др.

4. Определение данных рассеяния. Рассуждая так же, как и в работах ([7], [8]), можно получить разложение по собственным функциям граничной задачи (1), (2). В этом случае равенство Парсеваля имеет вид

$$\int_0^\infty U(x,\lambda)U^*(t,\lambda)d\lambda+\sum_{j=1}^p U_{1j}(x)U_{1j}^*(t)+\sum_{l=1}^q U_{2l}(x)U_{2l}^*(t)=\delta(x-t)I; \quad (6)$$

здесь нормированные собственные функции $U(x,\lambda)$, $U_{1j}(x)$, $U_{2l}(x)$ определяются формулами

$$U(x,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\left\{F(x,\lambda)\begin{pmatrix}\lambda, & 0\\ 0, & k\end{pmatrix}^{-1}-\right.$$

$$\left.-F(x,-\lambda)\begin{pmatrix}\lambda, & 0\\ 0, & k\end{pmatrix}^{-1}S(\lambda)\right\}\begin{pmatrix}\lambda, & 0\\ 0, & (\lambda k)^{1/2}\end{pmatrix},\quad |\lambda|>m, \quad (7)$$

$$U(x,\lambda)=(2\pi)^{1/2}\{F(x,\lambda)-F(x,-\lambda)S(\lambda)\},\quad |\lambda|<m, \quad (8)$$

$$U_{1j}(x)=F(x,\lambda_j)M_{1j},\quad j=1,\dots,p, \quad (9)$$

$$U_{2l}(x)=F(x,i\mu_l)M_{2l},\quad l=1,\dots,q, \quad (10)$$

где M_{1j}, $J=1,\dots,p$, и M_{2l}, $l=1,\dots,q$,— неотрицательные нормировочные матрицы второго порядка, ранги которых совпадают с кратностями собственных значений λ_j^2 и $-\mu_l^2$ соответственно; $k=(\lambda^2-m^2)^{1/2}$ и $\operatorname{Im}k>0$, если $\operatorname{Im}\lambda>0$; матрица рассеяния

$$S(\lambda)=F(0,\lambda)\{F^*(0,\lambda)\}^{-1}\ \text{при}\ |\lambda|>m,$$

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}(\lambda), & 0\\ \alpha_{21}(\lambda), & 1\end{pmatrix}\quad \text{при}\ |\lambda|<m.$$

Для простоты изложения в дальнейшем предполагается, что $\det F(0,\lambda)\neq 0$ при $\lambda=0$, $\lambda=\pm m$.

Из (7), (8), (9) и (10) следует, что асимптотика нормированных собственных функций граничной задачи (1), (2) при $x\to+\infty$ полностью определяется данными рассеяния

$$\lambda_j,\ M_{1j},\ j=1,\dots,p;\ M_{2l},\ \mu_l,\ l=1,\dots,q,\ S(\lambda). \quad (11)$$

5. О свойствах данных рассеяния и обратная задача. Из формулы (5) видно, что для определения $Q(x)$ достаточно знать матрицу $K(x, t)$. Матричная функция $K(x, t)$ удовлетворяет основному

имеет только нулевое решение (f_1, f_2) с компонентами $f_1(x)\in\mathscr{L}_2(-\infty, 0)$, $f_2(x)\in\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$, где

$$F_{11}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-s_{11}(\lambda)\}\exp(i\lambda x)\,d\lambda,$$

$$F_{12}(x,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k}\right)^{1/2}s_{12}(\lambda)\exp(-i\lambda x-ikt)\,d\lambda,$$

$$F_{21}(x,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{|\lambda|>m\\ \operatorname{Im}\lambda=0}}s_{21}(-\lambda)\exp(ikx-i\lambda t)\,d\lambda,$$

$$F_{22}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{|\lambda|>m\\ \operatorname{Im}\lambda=0}}\left(\frac{\lambda}{k}\right)^{1/2}\{1-s_{22}(-\lambda)\}\exp(ikx)\,d\lambda,$$

$$F_0(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^m s_2(\lambda)\exp(ikx-i\lambda t)\,d\lambda.$$

5^0. Число линейно-независимых вектор-решений однородного уравнения

$$f(t)+\int_0^\infty f(\tau)F_s(\tau,t)\,d\tau=0,\qquad 0<t<\infty,$$

с компонентами из $\mathscr{L}_2(0, \infty)$ совпадает с суммой рангов матриц M_{1j}, $j=1,\ldots,p$, M_{2l}, $l=1,\ldots,q$.

Основная теорема. *Условия* 1^0—5^0 *достаточны для того, чтобы совокупность величин* (11) *были данными рассеяния граничной задачи типа* (1), (2) *с эрмитовой матрицей* $Q(x)$, *для которой* $\|Q(x)\|\exp(mx)\in\mathscr{L}_1(0, \infty)$.

Замечание. Из основной теоремы следует, что между достаточными и необходимыми условиями на данные рассеяния имеется разрыв. А именно, восстановленная матрица-функция удовлетворяет условию (14), отличному от условия (3). В некоторых классах потенциалов можно устранить такой разрыв. Например, если $Q(x)$ финитная или же при любом натуральном k, $x^k\|Q(x)\|\exp(mx)\in\mathscr{L}_1(0,\infty)$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
2 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. С. Агранович, В. А. Марченко, Обратная задача теории рассеяния, 1960. [2] В. де Альфаро, Т. Редже, Потенциальное рассеяние, М., 1966. [3] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, М., 1971. [4] М. Б. Велиев, М. Г. Гасымов, Матем. заметки, № 5, 559 (1972). [5] L. Fonda, R. G. Newton, Ann. Phys., 12, 68 (1961). [6] L. Fonda, Ann. Phys., 12, 476 (1961). [7] В. А. Марченко, ДАН, 104, № 5 (1955). [8] М. Г. Гасымов, Тр. Московск. матем. общ., 19, 41 (1968).