Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 4

УДК 517.544 — *МАТЕМАТИКА*

М. И. ЖУРАВЛЕВА

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТА

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 30 V 1973)

Краевая задача Римана $\Phi^+=G\Phi^-+g$ с бесконечным индексом и непрерывным коэффициентом $G(t)\neq 0$ исследовалась в работах [4-9]. Случай, когда $G(t)$ имеет конечное число нулей и полюсов (и конечный индекс) изучен в работах Ф. Д. Гахова и Л. А. Чикина [1].

В данной статье рассматривается неоднородная краевая задача Римана с коэффициентом, имеющим бесконечное число нулей и полюсов.

В области D с границей L: $\{1<t<\infty\}$ рассмотрим задачу

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad G(t)=G_0(t)\,G_1(t)/G_2(t),\tag{1}$$

где

$$G_0(t)=\exp(2\pi[\psi_0(t)+i\varphi_0(t)]t^\rho),\qquad G_1(t)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-t/a_n),$$

$$G_2(t)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-t/b_n)$$

при следующих предположениях:

1) $1<a_1<a_2<\ldots,\ a_n\to\infty,\quad 1<b_1<b_2<\ldots,\ b_n\to\infty,$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho}n_1(t)=\Delta_1\geqslant 0,\quad \lim_{t\to\infty} t^{-\rho}n_2(t)=\Delta_2\geqslant 0,\quad 0<\rho<{}^1/_2,$$

где $n_i(t)$ означают число точек a_n (соответственно b_n) в $|z|\leqslant t$, и

$$n_1(t)=[\tilde\varphi(t)t^\rho],\quad \tilde\varphi(t)t^\rho\nearrow,\quad \tilde\varphi(\infty)=\Delta_1;$$

2) вещественные функции $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\tilde\varphi(t)$ удовлетворяют условиям *

$$\varphi_0(t),\quad \psi_0(t),\ \tilde\varphi(t)\in H_\mu,\quad \mu>\rho,$$

$$\varphi_0(1)=\psi_0(1)=\tilde\varphi(1)=0,\quad \varphi_0(\infty)=\lambda\geqslant 0,\quad \psi_0(\infty)=\nu,\quad -\infty<\nu<\infty;$$

3) ** $g(t)\in H_{\mu_0}$, $\mu_0>1-\rho$, $g(1)=g(\infty)=0$,

$$|g'(t+h)-g'(t)|<C_1h^{1-\rho}t^{(\rho-1)(2-\rho)},\quad 0<h<At^{1-\rho},$$

$$|g'(t)|<C_2t^{-\mu_0},\quad A,\ C_i=\text{const},$$

4) *** $\Delta_1-\Delta_2+2\nu\operatorname{tg}\rho\pi>0,\quad \Delta_1+\nu\operatorname{tg}\rho\pi<\lambda,$

5) $$[\varphi_0(t)t^\rho]',\ [\varphi_0(t)t^\rho]'',\ [\psi_0(t)t^\rho]',\ [\psi_0(t)t^\rho]''\in H(1-\rho),\tag{2}$$

$$[\varphi_0(t)t^\rho]',\ [\psi_0(t)t^\rho]'\to 0\quad \text{при}\quad t\to\infty.\tag{3}$$

---

* Условие Гёльдера ($f\in H_\mu$) имеет вид $|f(t_1)-f(t_2)|<K|1/t_1-1/t_2|^\mu$.

** Условие 3) заведомо выполняется при $g'(t)\in H_{\mu_0}$ и $g'(\infty)=0$, но обратное неверно.

*** При нарушении условия 4) задача (1) может оказаться неразрешимой.

Условия (2), (3) достаточно общие, например, можно взять

$$\varphi_0(t)=\lambda+\sum_{i=1}^{K} K_i t^{-\alpha_i},\qquad \psi_0(t)=\nu+\sum_{i=1}^{n} N_i t^{-\beta_i},\qquad \alpha_i,\beta_i>0,\qquad N_i, K_i=\mathrm{const}.$$

Понятие порядка и индикатора функции (целой или аналитической в угле) берется нами из ([2], [6]).

Задача (1) решается в классе B функций, аналитических и ограниченных в D. Общее решение неоднородной задачи (1) будем искать в виде

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Phi_0(z),$$

где $\Psi(z)$ — общее решение в классе B соответствующей однородной задачи, а $\Phi_0(z)\in B$ — частное решение задачи (1).

Назовем канонической функцией задачи (1) функцию

$$\mathrm{X}(z)=G_2(z)\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\ln G(x)}{x(x-z)}dx\right\} \tag{4}$$

и введем целую функцию

$$F_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right),\qquad z_n=\left(\frac{2n-1}{2\Delta_0}\right)^{1/\rho},\qquad \Delta_0=(\lambda-\Delta_1)\cos\rho\pi-\nu\sin\rho\pi. \tag{5}$$

Теорема 1. *Каноническая функция* $\mathrm{X}(z)$ *является решением однородной задачи* (1) *в классе* B, *причем* $\mathrm{X}^+(a_n)=0$.

Следствие. *Всякое решение* $\Psi(z)\in B$ *однородной задачи* (1) *удовлетворяет условию* $\Psi^+(a_n)=0$.

Следствие вытекает из представления $\Psi(z)=\mathrm{X}(z)F(z)$, где $F(z)$ — некоторая целая функция.

Рассмотрим сначала частный случай: $g(a_n)=0$, $n=1,2,\ldots$ Применяя метод Ф. Д. Гахова, берем частное решение задачи (1) в виде

$$\Phi_0(z)=\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_1^\infty\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)\,(x-z)}\equiv\Psi_0(z)\Omega(z), \tag{6}$$

где $\Psi_0(z)$ — частное решение класса B однородной задачи, подобранное так, чтобы интеграл в (6) сходился.

Теорема 2. *Если* $g(a_n)=0$, $n=1,2,\ldots$, *то функции*

$$\Psi_0(z)=\chi(z)F_0(z),\qquad \Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)\,(x-z)}$$

принадлежат классу B, *а функция* (6) *есть решение неоднородной задачи* (1) *в классе* B.

Общий случай сводится к частному преобразованием краевого условия (1):

$$\Phi^+(t)-\tilde g(t)=G(t)\Phi^-(t)+g_*(t),\qquad -\infty<t<\infty,$$

где

$$g_*(t)=g(t)-\tilde g(t),\qquad \tilde g(z)=\Psi_0(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(a_n)}{\Psi_0^{+\prime}(a_n)\,(z-a_n)}\qquad \operatorname{Im} z\geqslant 0.$$

Функция $\tilde g(z)$ аналитична в $\operatorname{Im} z>0$ и решает интерполяционную задачу: $\tilde g(a_n)=g(a_n)$, поэтому $g_*(a_n)=0$. Доказывается, что $\tilde g(z)$ ограничена и непрерывна в $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Теорема 3. *Краевая задача* (1) *имеет бесконечное множество ограниченных решений, общий вид которых дается формулой*

$$\Phi^+(z)=X(z)\left[\frac{F_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)\,(x-z)}+\right.$$

$$\left.+F_0(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(a_n)}{\Psi_0^{+1}(a_n)\,(z-a_n)}+F(z)\right],\qquad \operatorname{Im} z\geqslant 0,$$

$$\Phi^-(z)=X(z)\left[\frac{F_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)\,(x-z)}+F(z)\right],\qquad \operatorname{Im} z\leqslant 0,$$

где функции $X(z)$ и $F_0(z)$ *определены равенствами* (4), (5), *а* $F(z)$ — *целая функция порядка* $\rho_F\leqslant\rho$, *удовлетворяющая при* $\rho_F=\rho$ *дополнительной асимптотической оценке*

$$\ln|F(t)|C_F-\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{a_n}\right)\right|-t\int\limits_1^{\infty}\frac{\varphi_0(x)x^{\rho-1}}{x-t}dx-\pi\psi_0(t)t^{\rho},\quad 1<t<\infty.$$

При доказательстве теорем (2) и (3) используются следующие утверждения (в дальнейшем $K_i>0$ обозначают постоянные).

Лемма 1. *Если* $\varphi(t)$ *задана на* $[1,\infty)$ *и*

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<K_1h^{\mu}t^{\mu(\rho-1)},\quad 0<\mu\leqslant 1,\quad 0<h<At^{1-\rho},\quad A=\text{const},$$
$$|\varphi(t)|<K_2t^{-\delta},\quad \delta>0,\quad \varphi(1)=0,$$

то функция

$$I(t)=\int\limits_1^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx$$

ограничена на $[-\infty,\infty]$.

Лемма 2. *Функция* $f(t)=g_*(t)/\Psi_0^+(t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1.

Лемма 3. *Функция*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)\,(x-t)}$$

ограничена на оси $-\infty<t<\infty$.

Основная трудность всей работы заключается в доказательстве леммы 2, причем с особой сложностью устанавливается оценка

$$|g_*'(t+h)-g_*'(t)|<K_3h^{1-\rho}t^{(\rho-1)(2-\rho)}\quad\text{при } h<At^{1-\rho}.$$

Теорема 4 (аналог теоремы В. И. Мацаева ([10])). *Пусть* $\varphi(z)$ *аналитична в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z>0$, *непрерывна в* $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ *и*

$$\ln|\varphi(re^{i\theta})|\leqslant K_4(\sin\theta)^{-s}r^{\rho},\quad s>0,\quad \rho>0,\quad 0<\theta<\pi,$$

равномерно по θ *при* $r>r_0$

$$\ln|\varphi(t)|\leqslant K_5t^{\rho}\quad\text{при}\quad t>r_0.$$

Тогда асимптотически равномерно по θ

$$\ln|\varphi(re^{i\theta})|\leqslant K_6r^{\rho}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Н. В. Говорову, руководившему настоящей работой.

Кубанский государственный университет
Краснодар

Поступило
29 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, 1963. [2] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, 1956. [3] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1962. [4] Н. В. Говоров, ДАН, 182, № 4 (1968). [5] Н. В. Говоров, ДАН, 159, № 5 (1964). [6] Н. В. Говоров, Сборн. Теория функций и функц. анализ и их приложения, в. 6, Харьков, 1968. [7] П. Г. Юров, Докл. АН БССР, 12, № 6 (1968). [8] М. Э. Толочко, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 3 (1971). [9] Ф. Д. Беркович, Е. М. Конышкова, Сообщ. на II конфер. Ростовск. научн. математич. общ. 1968 г., Ростов-на-Дону, 1969. [10] В. И. Мацаев, ДАН, 132, № 2 (1960).