Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (102), 2017

УДК 512.548

Об ассоциативности и полуассоциативности полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$

А.М. Гальмак[1], М.В. Селькин[2], А.Д. Русаков[2]

Продолжается изучение полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. В частности, найдены новые критерии ассоциативности и полуассоциативности этой полиадической операции.
Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, ассоциативность, идемпотент.

Research of the polyadic operation $[\ ]_{l,\sigma,k}$ is considered. In particular, the new criteria of an associativity and semiassociativity of that operation were found.
Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, associativity, idempotent.

Введение Ассоциативные и полуассоциативные полиадические операции, арность которых больше двух, являются двумя различными обобщениями бинарных ассоциативных операций. В данной работе ассоциативность и полуассоциативность изучаются применительно к l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая была определена в [1] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. Частные случаи этой l-арной операции изучал Э. Пост в [2]. В качестве полугруппы A он рассматривал либо симметрическую группу, либо полную линейную группу над полем комплексных чисел. При этом арность полиадической операции и число k были связаны равенством $l = k + 1$, а роль подстановки σ в обоих случаях играл цикл $(12 \ldots k)$.

В [1] доказано, что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной. В частности, ассоциативными являются обе отмеченные выше $(k + 1)$-арные операции Э. Поста, так как k-ая степень цикла $(12 \ldots k)$ является тождественной подстановкой. Подробному изучению свойств l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и некоторых её обобщений посвящена книга [3].

В данной статье найдены новые достаточные условия ассоциативности полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. В частности, установлено, что если полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна. Сформулирован ряд следствий из этого результата для регулярных полугрупп и для полугрупп с левым сокращением.

1. Предварительные сведения.

Напомним определения некоторых понятий, используемых в работе.

l-Арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ и сам этот l-арный группоид называют *ассоциативными*, если в нём выполняются следующие $l - 1$ тождеств

$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1[x_2 \ldots x_{l+1}]x_{l+2} \ldots x_{2l-1}],$$
$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1x_2[x_3 \ldots x_{l+2}]x_{l+3} \ldots x_{2l-1}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{l-2}[x_{l-1} \ldots x_{2l-2}]x_{2l-1}],$$
$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{l-1}[x_l \ldots x_{2l-1}]].$$

Более кратко, l-арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют *ассоциативной*, если в нём для любого $i = 2, \ldots, l$ выполняется тождество

$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{i-1}[x_i \ldots x_{i+l-1}]x_{i+l} \ldots x_{2l-1}].$$

Если указанное тождество выполняется для $i = l$, то l-арную операцию $[\ ]$ и l-арный группоид $< A, [\ ] >$ называют *полуассоциативными*. Таким образом, l-арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют полуассоциативной, если в нём выполняется тождество

$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{l-1}[x_l \ldots x_{2l-1}]].$$

Ясно, что ассоциативная l-арная операция является и полуассоциативной.

Элемент a l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют его *идемпотентом*, если

$$[\underbrace{a \ldots a}_{l}] = a.$$

Определение 1.1 [1], [3] Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k l-арную операцию $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следующим образом: если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

то

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k.$$

Теорема 1.1 [1], [3]. *Если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* l-*арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной.*

2. Основной результат.

Теорема 2.1. *Если полугруппа* A *обладает идемпотентом* a *и отличным от него элементом* b *таким, что* $ab \neq a$, *то* l-*арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.*

Доказательство. *Необходимость.* Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

Достаточность. Для любого

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$$

положим

$$[[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l}]_{l,\sigma,k}\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-2}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k),$$

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k),$$

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k),$$

где

$$\mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}).$$

Тогда согласно определению 1.1,

$$u_j = \underbrace{a \ldots a}_{2l-2}\ x_{\sigma^{l-1}(j)},$$

$$v_j = \underbrace{a \ldots a}_{l-1}\ s_{\sigma^{l-1}(j)} = \underbrace{a \ldots a}_{l-1}\ \underbrace{a \ldots a}_{l-1}\ x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))},$$

то есть

$$v_j = \underbrace{a \ldots a}_{2l-2}\ x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}.$$

Так как a – идемпотент полугруппы A, то

$$u_j = a\,x_{\sigma^{l-1}(j)},\ v_j = a\,x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}.$$

Кроме того, так как l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – полуассоциативна, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, откуда, $u_j = v_j$. Таким образом,

$$a\,x_{\sigma^{l-1}(j)} = a\,x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}. \tag{2.1}$$

Предположим, что подстановка σ^{l-1} множества $\{1, \ldots, k\}$ не является тождественной. Тогда найдётся такое $r \in \{1, \ldots, k\}$, что

$$\sigma^{l-1}(r) \neq r.$$

Ясно, что

$$r = \sigma^{l-1}(j)$$

для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Таким образом, равенство (2.1) принимает вид

$$a\,x_{\sigma^{l-1}(j)} = a\,x_{\sigma^{l-1}(r)}, \tag{2.2}$$

при этом

$$\sigma^{l-1}(r) \neq \sigma^{l-1}(j).$$

Это неравенство позволяет положить

$$a = x_{\sigma^{l-1}(j)},\ b = x_{\sigma^{l-1}(r)}.$$

Тогда равенство (2.2) принимает вид

$$aa = ab.$$

А так как a – идемпотент в полугруппе A, то получаем равенство $a = ab$, которое противоречит неравенству из условия теоремы. Таким образом, предположение о нетождественности подстановки σ^{l-1} неверно. Следовательно, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^{l} = \sigma$. Тогда по теореме 1.1 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ ассоциативна. Теорема доказана.

Теоремы 1.1 и 2.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной*;

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является полуассоциативной*;

3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2)$\Rightarrow$3) В доказательстве достаточности теоремы 2.1 установлено, что из полуассоциативности l-арной операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следует равенство $\sigma^{l} = \sigma$, что равносильно тождественности подстановки σ^{l-1}.

3)$\Rightarrow$1) Применяется теорема 1.1. Теорема доказана.

Теорема 2.2 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

Теорема 2.3. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{l} \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

3. Следствия.

Так как всякая регулярная полугруппа обладает идемпотентом, то теоремы 2.1–2.3 позволяют сформулировать следующие три следствия.

Следствие 3.1. *Если A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.*

Следствие 3.2. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной*;

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является полуассоциативной*;

3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

Следствие 3.3. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{l} \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

Напомним, что группоид A называют группоидом с *левым сокращением*, если для любых $x, a, b \in A$ из $xa = xb$ следует $a = b$.

Следствие 3.4. *Если неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.*

Доказательство. Зафиксируем идемпотент a полугруппы A и предположим, что в A имеется такой элемент b, что

$$b \neq a,\ ab = a.$$

Тогда

$$ab = aa,$$

откуда, применяя левую сократимость в A, получаем $b = a$, что противоречит неравенству $b \neq a$. Таким образом, для любого элемента $b \in A$, отличного от идемпотента a, верно $ab \neq a$. Осталось применить теорему 2.1. Теорема доказана.

Следующие два следствия вытекают соответственно из теорем 2.2 и 2.3.

Следствие 3.5. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной*;

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является полуассоциативной*;

3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

Следствие 3.6. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

Так как всякий идемпотент полугруппы с левым сокращением является её левой единицей, то идемпотенты, о которых идёт речь в следствиях 3.4–3.6, являются левыми единицами полугруппы A.

4. Приложения для некоторых конкретных подстановок.

Применим полученные в предыдущих разделах результаты к некоторым конкретным подстановкам.

Теорема 4.1. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка $d \geq 2$. Тогда*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \ldots\}; \qquad (4.1)$$

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, d\}. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (4.1) и (4.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d, то для всех l из (4.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (4.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.1). Тогда l принадлежит множеству из (4.2), и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.3 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – неассоциативна, что противоречит её ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 1.1 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.2). Тогда l принадлежит множеству из (4.1), и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 1.1 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – ассоциативна, что противоречит её неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.3 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной. Теорема доказана.

Так как любой цикл длины k из $\mathbf{S}_k$ имеет порядок k, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \ldots\}; \qquad (4.3)$$

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, k\}. \qquad (4.4)$$

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 4.2. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.3);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.4).

Если в (4.1) и (4.2) положить $d = 2$, то множество всех l в (4.1) совпадает с множеством всех нечётных чисел без единицы, а множество всех l в (4.2) совпадает с множеством всех чётных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.3. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.*

Полагая в следствии 4.3 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 4.4. *Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12),k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12),k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.*

Замечание 4.1. В теореме 4.1, а значит и в следствиях 4.1–4.4, можно заменить ассоциативность на полуассоциативность. Это вытекает из теоремы 2.1.

Случай регулярных полугрупп. Результаты, аналогичные теореме 4.1 и следствиям 4.1–4.4, имеют место для регулярных полугрупп.

Теорема 4.2. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.1);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.2).

Следствие 4.5. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.3);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.4).

Следствие 4.6. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.3);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.4).

Следствие 4.7. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.*

Следствие 4.8. *Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12),k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12),k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.*

Замечание 4.2. В теореме 4.2, а значит и в следствиях 4.5–4.8, можно заменить ассоциативность на полуассоциативность. Это вытекает из следствия 3.1.

Случай полугрупп с левым сокращением. Результаты, аналогичные теореме 4.1 и следствиям 4.1–4.4, имеют место для полугрупп с левым сокращением.

Теорема 4.3. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом*; σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.1);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.2).

Следствие 4.9. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом*; σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.3);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.4);

Следствие 4.10. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,(12\,\ldots\,k),\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.3);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,(12\,\ldots\,k),\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.4).

Следствие 4.11. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом*; σ – *транспозиция из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.*

Следствие 4.12. *Пусть неодноэлементная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,(12),\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,(12),\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.*

Замечание 4.3. В теореме 4.3, а значит и в следствиях 4.9–4.12, можно заменить ассоциативность на полуассоциативность. Это вытекает из следствия 3.4.

Литература

1. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

[1]Могилевский государственный
университет продовольствия

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 19.02.2017