Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

А. В. БУХВАЛОВ, Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О ЗАМКНУТЫХ ПО МЕРЕ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 III 1973)

В работе показывается, что ограниченные выпуклые множества, замкнутые относительно сходимости по мере в «хороших» пространствах измеримых функций, обладают рядом полезных свойств, выполнение которых ранее чаще всего связывалось с условием компактности. Результаты сформулированы для широкого класса пространств измеримых функций, но, по-видимому, они являются новыми даже для пространства $L^1[0, 1]$.

1. Обозначения и терминология. В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы следуем [1]. Напомним некоторые сведения. Пусть E — K-линеал (векторная решетка). Для $M\subset E$ полагаем $M^d=\{x\in E\colon |x|\wedge|y|=0$ для любого $y\in M\}$. Множество $M\subset E$ называется нормальным, если $(x\in E,\ y\in M,\ |x|\leqslant|y|)\Rightarrow(x\in M)$. Линейное нормальное множество в E называется идеалом. Идеал Y в E называется фундаментом, если $Y^d=\{0\}$. Идеал Y в E называется компонентой, если $Y=(Y^d)^d$. Через $\tilde{E}$ (соответственно $\bar{E}$) обозначается пространство регулярных (соответственно вполне линейных) функционалов на E. Если E есть K-пространство (условно полная векторная решетка), Y — компонента в E, то через Pr_Y обозначается оператор проектирования E на Y (см. [1], гл. IV, § 3). KN-пространством называется K-пространство, являющееся нормированным пространством, с монотонной нормой. Сопряженное к нормированному пространству E обозначается E^*. Напомним, что для банахова KN-пространства E справедливо $E^*=\tilde{E}$.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, где T — множество, Σ — некоторая σ-алгебра его подмножеств, μ — неотрицательная счетно-аддитивная мера на Σ. Полагаем $\Sigma(\mu)=\{A\in\Sigma\colon \mu(A)<\infty\}$. Через $S=S(T, \Sigma, \mu)$ обозначается пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций с отождествлением эквивалентных и естественным упорядочением. Через τ обозначаем топологию μ-сходимости на S, базис окрестностей нуля которой состоит из множеств вида $U(A;\varepsilon)=\left\{x\in S\colon \int\limits_A\frac{|x|}{1+|x|}\,d\mu<\varepsilon\right\}$, где $A\in\Sigma(\mu)$ и число $\varepsilon>0$ произвольны. Для $X\subset S$ через $\tau(X)$ обозначается топология на X, индуцированная топологией τ.

На протяжении всей работы (T, Σ, μ) есть пространство с мерой, удовлетворяющее следующим условиям: а) $(A\subset B\in\Sigma,\ \mu(B)=0)\Rightarrow(A\in\Sigma)$; б) если для некоторого $A\subset T$ при любом $B\in\Sigma(\mu)$ справедливо $B\cap A\in\Sigma$, то $A\in\Sigma$; в) для $A\in\Sigma$ справедливо $\mu(A)=\sup\{\mu(B)\colon B\in\Sigma(\mu),\ B\subset A\}$; г) $S(T, \Sigma, \mu)$ есть K-пространство. Напомним, что если μ σ-конечна, то условия б), в), г) выполнены автоматически.

Пусть X есть фундамент в $S=S(T, \Sigma, \mu)$. Полагаем

$$X'=\left\{x'\in S\colon \int\limits_T|xx'|\,d\mu<\infty \text{ для любого } x\in X\right\}.$$

Напомним, что X' можно отождествить с $\overline{X}$, если $x' \in X'$ сопоставить $f_{x'} \in \overline{X}$, действующий по формуле $f_{x'}(x) = \int x x' \, d\mu$, $x \in X$ ([2]). Через π обозначаем оператор естественного вложения X в $\overline{\overline{X}}$. Фундамент X в S называется рефлексивным по Накано, если X' есть фундамент в S и $X'' = X$ (т. е. если $\overline{X}$ тотально на X и $\pi(X) = \overline{\overline{X}}$). Через $\mathfrak{R}$ обозначаем совокупность всех фундаментов в S, рефлексивных по Накано. Напомним, что для $X \in \mathfrak{R}$ пространство $\pi(X)$ есть компонента в пространстве $\widetilde{\overline{X}}$ всех регулярных функционалов на $\overline{X}$, поэтому имеет смысл оператор проектирования $\mathrm{Pr}_{\pi(X)}$: $\widetilde{\overline{X}} \to \pi(X)$.

Отметим, что если $X \in \mathfrak{R}$ и множество $M \subset X$ ограничено в слабой топологии $\sigma(X, \overline{X})$, то M замкнуто в $(X, \tau(X))$ тогда и только тогда, когда M замкнуто в (S, τ).

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, V — непустое выпуклое множество в X, W — замыкание множества $\pi(V)$ в $\widetilde{\overline{X}}$ в топологии $\sigma(\widetilde{\overline{X}}, \overline{X})$. Тогда*

а) *если V замкнуто в $(X, \tau(X))$, то*

$$\mathrm{Pr}_{\pi(X)} W = \pi(V); \tag{*}$$

б) *если V ограничено в топологии $\sigma(X, \overline{X})$ и удовлетворяет условию (*), то V замкнуто в $(X, \tau(X))$.*

Замечание. В теореме 1б) условие $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченности множества V опустить нельзя (достаточно рассмотреть случай $X = L^2[0, 1]$, $V = \{x \in X: \int_0^1 x(t)\,dt = 0\}$).

Теорема 2. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, Z — фундамент в $\overline{X}$. Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в X, замкнутые в $(X, \tau(X))$. Если одно из них $\sigma(X, \overline{X})$-ограничено, то существует функционал $f \in Z$ такой, что $\sup f(V_1) < \inf f(V_2)$.*

Теорема 3. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — центрированная система выпуклых, $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченных, замкнутых в $(X, \tau(X))$ подмножеств пространства X. Тогда $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi \neq \phi$.*

Теорема 4. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, V_1 и V_2 — выпуклые, $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченные, замкнутые в $(X, \tau(X))$ подмножества пространства X.*

Тогда множество $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2: v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Теорема 5. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, V — непустое, выпуклое, $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченное множество в X, замкнутое в $(X, \tau(X))$. Пусть $A \in \Sigma$, χ_A — характеристическая функция множества A.*

Тогда множество $\{x\chi_A: x \in V\}$ замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Теорема 6. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, X есть KN-пространство и в X выполнено следующее условие: если направление $\{x_\alpha\}$ в X таково, что $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ и $\sup \|x_\alpha\| < \infty$, то существует $x = \sup x_\alpha \in X$ и $\|x\| = \sup \|x_\alpha\|$. Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые множества в X, замкнутые в $(X, \tau(X))$. Если одно из них ограничено по норме в X, то существуют такие $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, что*

$$\|x_1 - x_2\| = \inf\{\|y_1 - y_2\|: y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}.$$

Следующая теорема дополняет в несепарабельном случае известный результат Ч. Бессаги и А. Пелчиньского об экстремальных точках выпуклых множеств в сепарабельных сопряженных пространствах.

Теорема 7. *Пусть E — произвольное банахово KN-пространство такое, что в E и E^* нормы непрерывны *.*

Тогда замкнутый единичный шар пространства E^* совпадает с замкнутой (относительно нормированной топологии пространства E^*) выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

---

* Норма в KN-пространстве E называется непрерывной, если из $x_n \downarrow 0$ в E следует, что $\|x_n\| \to 0$.

3. О пространстве $L^1[0, 1]$. В теоремах 1 — 6 за (T, Σ, μ) можно принять, в частности, отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега, а за X принять пространство $L^1[0, 1]$. Тогда $\overline{X}=X^*$, $\overline{\overline{X}}=X^{**}$, топология $\sigma(X, \overline{X})$ есть обычная слабая топология пространства $L^1[0, 1]$. Сформулируем для указанного частного случая, например, теоремы 2, 3 и 6.

Теорема 2′. *Пусть V_1 и V_2 — непустые выпуклые непересекающиеся множества в $L^1[0, 1]$, замкнутые в $L^1[0, 1]$ относительно сходимости по мере. Если одно из них ограничено по норме, то существует такой функционал $f\in(L^1[0, 1])^*$, что* $\sup f(V_1)<\inf f(V_2)$.

Теорема 3′. *Всякая центрированная система выпуклых, ограниченных по норме, замкнутых относительно сходимости по мере множеств в $L^1[0, 1]$ имеет непустое пересечение.*

Теорема 6′. *Пусть V_1 и V_2 — непустые выпуклые множества в $L^1[0, 1]$, замкнутые в $L^1[0, 1]$ относительно сходимости по мере. Если одно из них ограничено по норме, то существуют такие $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$, что*

$$\|x_1-x_2\|=\inf\{\|y_1-y_2\|:\ y_1\in V_1,\ y_2\in V_2\}.$$

В заключение заметим, что доказательства результатов заметки основаны на теории векторных решеток.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 16 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
[2] Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский, Матем. сборн., 84 (126), № 3, 331 (1971).