Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 4

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ЯЗЫКЕ $Я_3$

В ([1-3]) были построены языки $Я_0$, $Я_1$ и $Я_3$, с которых, как полагает автор, может быть начато построение «башни» языков — ступенчатой семантической системы конструктивной математической логики. Здесь строится возможный следующий «этаж» башни — язык $Я_3$, являющийся расширением языка $Я_2$.

Определим ф о р м у л ы я з ы к а $Я_3$ [Фл3] следующими правилами построения:

$$\text{Фл 3.1. } \frac{A\text{—Фл 2}}{A\text{—Фл 3}}. \qquad \text{Фл 3.3. } \frac{C, D\text{—Фл 3; } C \text{ не Фл 2 или } D \text{ не Фл 2}}{\&CD\text{—Фл 3}}.$$

$$\text{Фл 3.2 } \frac{A, B\text{—Фл 2}}{\supset|AB\text{—Фл 3}}. \qquad \text{Фл 3.4 } \frac{X\text{—Пн}, E\text{—Фл 3}, E \text{ не Фл 2}}{\forall XE\text{—Фл 3}}.$$

Всякая Фл3 представляется в одном и только в одном из четырех видов: A, где A — Фл2; $\supset|AB$, где A и B — Фл2; $\&CD$, где C и D — Фл3, причем хотя бы одна из них не есть Фл2; $\forall XE$, где X — Пн, E — Фл3 и E не есть Фл2. Во всех этих случаях указанное представление Фл3 единственно.

Определим п а р а м е т р ы в я з ы к е $Я_3$ [Пр3] Фл3 аналогично определению Пр2 ([3]). Фл3 без Пр3 будем называть з а м к н у т ы м и Фл3 [ЗФ3]. Фл3, не имеющие Пр3, отличных от Пн X, будем называть XФл3 [XФ3]. Фл3, не имеющие Пр3, отличных от Пн X и Y, будем называть XYФл3 [XYФ3], и т. д.

Определим а л г о р и ф м $\mathfrak{C}_3$ л о г и ч е с к о й д л и н ы в я з ы к е $Я_3$ аналогично определению алгорифма $\mathfrak{C}_2$ ([3]). Имеем $\mathfrak{C}_{3\llcorner}A_\lrcorner \risingdotseq 0$ тогда и только тогда, когда A — Фл2 или имеет вид $\supset|FG$, где F и G — Фл2.

Аналогично определению алгорифма подстановки в языке $Я_2$ определим индукцией по $\mathfrak{C}_{3\llcorner}A_\lrcorner$ алгорифм подстановки $\mathfrak{F}_3$, перерабатывающий всякое слово вида XAT, где X — Пн, A — Фл3, T — Тм, в Фл3, называемую р е з у л ь т а т о м п о д с т а н о в к и T в м е с т о X в A. При этом будем иметь $\mathfrak{C}_{3\llcorner}\mathfrak{F}_{3\llcorner}XAT_{\lrcorner\lrcorner} \risingdotseq \mathfrak{C}_3A_\lrcorner$.

Определим наше понимание ЗФ3 следующими четырьмя семантическими соглашениями.

Сс3.1. Всякая ЗФ2 выражает на языке $Я_3$ то же, что на языке $Я_2$.

Сс3.2. Всякая ЗФ3 вида $\supset|AB$, где A и B — ЗФ2, выражает, что B выводима из A ([3]).

Сс3.3. Всякая ЗФ3 вида $\&CD$, где C и D — такие ЗФ3, что хотя бы одна из них не есть ЗФ2, выражает, что обе эти ЗФ3 верны.

Сс3.4. Всякая ЗФ3 вида $\forall XE$, где X — Пн, E — XФ3, не являющаяся Фл2, выражает, что мы владеем общим методом установления истинности любой ЗФ3 вида $\mathfrak{F}_{3\llcorner}XEQ_\lrcorner$, где Q — любой Вд.

Это определение также индуктивно. Индукция идет здесь по логической длине в $Я_3$ той Фл3, понимание которой определяется.

Фл3 вида $\supset|AB$, где A и B — Фл2, будем называть и м п л и к а ц и я м и п е р в о г о р а н г а (в отличие от импликаций нулевого ранга, называемых в ([3]) просто импликациями).

Следующие импликации первого ранга верны в $Я_3$;

$$
\begin{array}{ll}
\supset|AA & \supset|\&E\supset EFF \\
\supset|\&ABA & \supset|\&\supset EF\supset FG\supset EG \\
\supset|\&ABB & \supset|F\supset EF \\
\supset|\&AB\&BA & \supset|\&\supset EF\supset EG\supset E\&EG \\
\supset|\&\&ABC\&A\&BC & \supset|\&\supset EG\supset FG\supset\bigvee EFG \\
\supset|\&A\&BC\&\&ABC & \supset|F\supset G\&FG \\
\supset|\forall XD\mathfrak{F}_{2}\llcorner XDQ\lrcorner & \supset|\forall X\supset HF\supset\exists XHF.
\end{array}
$$

Здесь A, B и C — ЗФ2; X — Пн, D—ХФ2; E, F и G—ЗФ1; H — ХФ1.

Имеют место следующие теоремы, позволяющие устанавливать новые верные ЗФ3, исходя из имеющихся:

$$
1.\ \frac{A\supset|AB}{B}.\qquad 2.\ \frac{\supset|AB\ \supset|BC}{\supset|AC}.\qquad 3.\ \frac{B}{\supset|AB}.\qquad 4.\ \frac{\supset|AB\ \supset|AC}{\supset|A\&BC}.
$$

$$
5.\ \frac{\forall X\supset|AG}{\supset|A\forall XG}.\qquad 6.\ \frac{DE}{\&DE}.\qquad 7.\ \frac{\&DE}{D}.\qquad 8.\ \frac{\&DE}{E}.
$$

$$
9.\ \frac{\mathfrak{F}_{3}\llcorner XHQ\lrcorner\ \text{для всякого Вд}\ Q}{\forall XH}.\qquad 10.\ \frac{\forall XH}{\mathfrak{F}_{3}\llcorner XHQ\lrcorner}.
$$

Здесь A, B и C — ЗФ2; X — Пн; D и E — ЗФ3; G — ХФ2, H — ХФ3, Q — Вд.

Примененная здесь сокращенная запись теорем понимается так же, как запись теорем 1—11 в ([3]). Теорема 1 была доказана в ([3]). Теорема 2 легко доказывается с помощью теоремы индукции ([3]). Остальные теоремы легко следуют из семантических соглашений Сс 3.1 — Сс 3.4 и определения выводимости.

Определим квазиэлементарные формулы [КФ] следующими правилами построения:

$$
\text{КФ 1.}\quad \frac{A\text{—Фл 1}}{A\text{—КФ}};
$$

$$
\text{КФ 2.}\quad \frac{A, B\text{—Фл 1}}{\supset AB\text{—КФ}};
$$

$$
\text{КФ 3.}\quad \frac{C, D\text{—КФ};\ C\ \text{не Фл 1 или}\ D\ \text{не Фл 1}}{\&CD\text{—КФ}}.
$$

Определим алгорифм $\mathfrak{R}_2$ следующими равенствами:

$\mathfrak{R}_2 1.$ $\mathfrak{R}_{2}\llcorner AB\lrcorner\rightleftharpoons\supset AB;$

$\mathfrak{R}_2 2.$ $\mathfrak{R}_{2}\llcorner A\supset CB\lrcorner\rightleftharpoons\supset\&ACB;$

$\mathfrak{R}_2 3.$ $\mathfrak{R}_{2}\llcorner\supset DAB\lrcorner\rightleftharpoons\&\bigvee DB\supset AB;$

$\mathfrak{R}_2 4.$ $\mathfrak{R}_{2}\llcorner\supset DA\supset CB\lrcorner\rightleftharpoons\&\supset C\bigvee DB\supset\&ACB;$

$\mathfrak{R}_2 5.$ $\mathfrak{R}_{2}\llcorner E\&FG\lrcorner\rightleftharpoons\&\mathfrak{R}_{2}\llcorner EF\lrcorner\mathfrak{R}_{2}\llcorner EG\lrcorner;$

$$
\mathfrak{R}_2 6.\ \mathfrak{R}_{2}\llcorner E\forall XH\lrcorner\rightleftharpoons\begin{cases}\forall X\mathfrak{R}_{2}\llcorner EH\lrcorner, & \text{если } X \text{ не есть Пр } E;\\ \forall Y\mathfrak{R}_{2}\llcorner E\mathfrak{F}_{2}\llcorner XHY\lrcorner\lrcorner, & \text{если } X\text{—Пр } E;\end{cases}
$$

$\mathfrak{R}_2 7.$ $\mathfrak{R}_{2}\llcorner\&IJL\lrcorner\rightleftharpoons\mathfrak{R}_{2}\llcorner J\mathfrak{R}_{2}\llcorner JL\lrcorner\lrcorner.$

Здесь A, B, C и D — Фл1; E — Фл1 или импликация нулевого ранга; F и G — такие Фл2, что хотя бы одна из них не есть Фл1; X — Пн; H и L — Фл2; Y — самая короткая из Пн, не являющихся ни Пр2 E, ни Пр2 H; I и J — такие КФ, что хотя бы одна из них не есть Фл1.

Равенства $\mathfrak{R}_2 1$ — $\mathfrak{R}_2 7$ определяют индуктивно результат применения алгорифма $\mathfrak{R}_2$ к словам вида KL, где K — КФ, L — ЗФ2. Равенства $\mathfrak{R}_2 1$ — $\mathfrak{R}_2 4$ образуют основание индукции: они определяют $\mathfrak{R}_{2}\llcorner KL\lrcorner$ при условии, что $\mathfrak{E}_{2}\llcorner K\lrcorner\overset{c}{=}0$ и $\mathfrak{E}_{2}\llcorner L\lrcorner\overset{c}{=}0$. Равенства $\mathfrak{R}_2 5$ и $\mathfrak{R}_2 6$ определяют $\mathfrak{R}_{2}\llcorner KL\lrcorner$ индукцией по

$\mathfrak{S}_{2\llcorner} L_{\lrcorner}$ при условии, что $\mathfrak{S}_{2\llcorner} K_{\lrcorner} \doteq 0$. Наконец, равенство $\mathfrak{R}_2 7$ осуществляет индукцию по $\mathfrak{S}_{2\llcorner} K_{\lrcorner}$. Вместе с тем выясняется, что при рассматриваемых K и L $\mathfrak{R}_{2\llcorner} KL_{\lrcorner}$ есть Фл2, причем Пр2 $\mathfrak{R}_{2\llcorner} KL_{\lrcorner}$ являются ПрK и ПрL. Следовательно, $\mathfrak{R}_{2\llcorner} KL_{\lrcorner}$ тогда и только тогда есть ЗФ2, когда K есть замкнутая КФ, а L — ЗФ2.

С помощью теоремы индукции (³) может быть доказана теорема

$$11.\ \frac{\supset|\&AIB}{\supset|A\mathfrak{R}_{2\llcorner} IB_{\lrcorner}}.$$

Здесь A и B — ЗФ2, I — замкнутая КФ.

Без труда доказывается обратная теорема

$$12.\ \frac{\supset|A\mathfrak{R}_{2\llcorner} IB_{\lrcorner}}{\supset|\&AIB} \text{ с такими же } A, B \text{ и } I.$$

Из теорем 11 и 12 вытекают следствия

$$13.\ \frac{\supset|IB}{\mathfrak{R}_{2\llcorner} IB_{\lrcorner}}; \qquad 14.\ \frac{\mathfrak{R}_{2\llcorner} IB_{\lrcorner}}{\supset|IB}, \text{ где } I \text{ — замкнутая КФ, } B \text{ — ЗФ2.}$$

Наконец, получаем

$$15.\ \frac{\supset|AB}{\supset AB}; \qquad 16.\ \frac{\supset AB}{\supset|AB}, \text{ где } A \text{ и } B \text{ — ЗФ1.}$$

Последние две теоремы показывают, что наши два вида импликаций согласованы между собой там, где они оба осмысленно применимы, т. е. где осмысленно применима импликация нулевого ранга.

В языках $Я_2$ и $Я_3$ в качестве сокращений могут быть введены отрицания нулевого и первого рангов:

$$\urcorner A \rightleftharpoons \supset A(\neq),$$
$$\urcorner|B \rightleftharpoons \supset|B(\neq).$$

Здесь A — Фл1, B — Фл2. При этих условиях $\urcorner A$ есть КФ, а $\urcorner|B$ есть Фл3. Следовательно, $\urcorner|\urcorner A$, где A — Фл1, есть Фл3. Из теорем 13 и 14 вытекают следствия

$$17.\ \frac{\urcorner|\urcorner A}{A}; \qquad 18.\ \frac{A}{\urcorner|\urcorner A}$$

— законы снятия и наложения двойного отрицания, в которых A — произвольная ЗФ1. Принимая во внимание, что ЗФ1 может выражать применимость НА к слову (¹), мы замечаем, что из теоремы 17 вытекает некоторая уточненная форма принципа конструктивного подбора (⁴): *если средствами системы S_2 (³) опровержимо приведением к абсурду предположение о неприменимости* НА $\mathfrak{A}$ *к слову P, то $\mathfrak{A}$ применим к P.*

Определим теперь «3-выводимость» одной ЗФ3 из другой тринадцатью правилами 3-выводимости ПВ 3.1 — ПВ 3.13, в которых: K, D и E — любые ЗФ3; A, B и C — любые ЗФ2; X — Пн; Q — Вд; H — ХФ3; G — ХФ2; I — замкнутая КФ. Эти правила строятся следующим образом. В каждом из правил ПВ 2.i, $1 \leqslant i \leqslant 12$, $i \neq 7$ (³), делаются замены цифры 2 на цифру 3, знака $\supset$ на знак $\supset|$ и слов «выводимой», «выводимы», «выводима» на «3-выводимой», «3-выводимы», «3-выводима». Это дает правила ПВ3.i, $1 \leqslant i \leqslant 12$, $i \neq 7$. Кроме того формулируются следующие правила:

ПВ 3.7. Всякий раз, когда ЗФ3 $\forall X \supset|AG$ 3-выводима из K, ЗФ3 $\supset|A\forall XG$ может считаться 3-выводимой из K.

ПВ 3.13. Всякий раз, когда ЗФ3 $\supset|\&AIB$ 3-выводима из K, ЗФ3 $\supset|A\mathfrak{R}_{2\llcorner} IB_{\lrcorner}$ может считаться 3-выводимой из K.

ЗФ3 L может считаться 3-выводимой из ЗФ3 K тогда и только тогда, когда это можно установить на основании правил ПВ 3.1 — ПВ 3.13. Полуформальную систему этих правил мы будем обозначать S_3.

Определим понятие $3K$-индуктивного условия, где K — ЗФЗ.

Пусть $У$ — условие, которое может быть осмысленно наложено на ЗФЗ. Будем говорить, что $У$ $3K$-индуктивно, если выполняются 13 условий $3K$И 1—$3K$И 13, построенных следующим образом. В каждом из условий KИi, $1 \leqslant i \leqslant 12$, $i \neq 7$ ([3]), делаются замены цифр 2 на цифры 3 и знака $\supset$ на знак $\supset|$. Это дает условия $3K$Иi, $1 \leqslant i \leqslant 12$, $i \neq 7$. Кроме того формулируются следующие условия $3K$И 7 и $3K$И 13.

$3K$И 7. Всякий раз, когда ЗФЗ $\forall X \supset| AG$ удовлетворяет условию $У$, ЗФЗ $\supset| A \forall XG$ удовлетворяет $У$.

$3K$И 13. Всякий раз, когда ЗФЗ $\supset| \& AIB$ удовлетворяет условию $У$, ЗФЗ $\supset| A\mathfrak{R}_{21} IB_{1}$, удовлетворяет $У$.

Буквы K, D, E, A, B, C, X, Q, H, G, I имеют здесь тот же смысл, что в системе S_3.

Имеет место следующая

Теорема индукции. *В случае, когда условие $У$ $3K$-индуктивно, всякая* ЗФЗ, *3-выводимая из K, удовлетворяет условию $У$.*

Из этой теоремы и теорем 1—11 вытекает семантическая пригодность системы S_3, т. е. следующая

Теорема. *Всякая* ЗФЗ, *3-выводимая из верной в $Я_3$* ЗФЗ, *верна в $Я_3$.*

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
6 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, ДАН, 214, № 1 (1974). [2] А. А. Марков, ДАН, 214, № 2 (1974). [3] А. А. Марков, ДАН, 214, № 3 (1974). [4] А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 67 (1962).

Поправка. В предыдущей статье А. А. Маркова (ДАН, т. 214, № 3) заглавие статьи следует читать: **О языке $Я_2$.**