Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513/516:513.88 *МАТЕМАТИКА*

Л. Ф. ГЕРМАН, В. П. СОЛТАН, П. С. СОЛТАН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА d-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 III 1973)

Рассматриваемое в этой заметке понятие d-выпуклости возникло при решении некоторой прикладной задачи на графах [5] и является естественным аналогом понятия обычной (линейной) выпуклости. В отличие от последней понятие d-выпуклости имеет смысл в произвольном метрическом пространстве [7].

Цель этой заметки — доказать некоторые свойства d-выпуклых множеств. Относительно других результатов см. [6, 7].

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $M\subset X$, $M\neq\phi$, называется d-выпуклым, если для любых точек $x, y, z\in X$ из условий $x, y\in M$, $\mathrm{d}(x, z)+\mathrm{d}(z, y)=\mathrm{d}(x, y)$ следует включение $z\in M$ [5, 7]. Пустое множество будем считать d-выпуклым.

Из этого определения очевидно следует, что пересечение любой совокупности d-выпуклых множеств пространства X также есть d-выпуклое множество.

Для любого множества $F\subset X$ естественно определяется его d-выпуклая оболочка — наименьшее по включению d-выпуклое множество, содержащее F и обозначаемое через $\mathrm{d\text{-}conv}\, F$. Очевидно, d-выпуклая оболочка множества $F\subset X$ есть пересечение всех d-выпуклых множеств из X, содержащих F.

Содержательные результаты о d-выпуклых множествах получаются в нормированных пространствах, поэтому в дальнейшем основным пространством X будем считать вещественное нормированное пространство $\mathscr{R}^n$ размерности n. Для любых $x, y\in\mathscr{R}^n$ положим $\mathrm{d}(x, y)=\|x-y\|$. Единичный шар пространства $\mathscr{R}^n$ и его границу обозначим через Σ^n и S^{n-1}.

В пространстве $\mathscr{R}^n$ всякое d-выпуклое множество является линейно-выпуклым. d-Выпуклость совпадает с линейной выпуклостью тогда и только тогда, когда пространство $\mathscr{R}^n$ строго нормировано [6].

d-выпуклая оболочка двух любых точек $x, y\in\mathscr{R}^n$ может отличаться от отрезка $[x, y]$. Однако имеет место следующая.

Лемма 1. *Пусть точки $x, y, z\in\mathscr{R}^n$ таковы, что $\mathrm{d}(x, z)+\mathrm{d}(z, y)=\mathrm{d}(x, y)$. Тогда для любой точки w множества $[x, z]\cup[z, y]$ выполняется соотношение $\mathrm{d}(x, w)+\mathrm{d}(w, y)=\mathrm{d}(x, y)$.*

Произвольное полупространство $P\subset\mathscr{R}^n$ однозначно определяет гиперплоскость, отделяющую P от дополнительного к нему полупространства.

Теорема 1. *Полупространство $P\subset\mathscr{R}^n$ является d-выпуклым тогда и только тогда, когда d-выпукла определяющая его гиперплоскость.*

Пусть $L\neq0$ — подпространство из $\mathscr{R}^n$. Положим $S_L=S^{n-1}\cap L$. Сферическим раствором [4] ненулевых подпространств L, M называется число

$$\bar{\theta}(L, M)=\max\,\{\sup_{x\in S_M}\mathrm{d}(x, S_L),\quad \sup_{x\in S_L}\mathrm{d}(x; S_M)\},$$

где $\mathrm{d}(x; F)$ означает расстояние вектора x от компактного множества F. Полагая $\bar{\theta}(0, M)=\bar{\theta}(M, 0)=1$, $\bar{\theta}(0, 0)=0$, мы получаем метрику в множестве всех подпространств из $\mathscr{R}^n$.

Для каждого $k=1, 2, \ldots, n$ множество G_k всех подпространств фиксированной размерности k компактно в метрике $\bar{\theta}$ [4]. Обозначим через

D_k, $k=1, 2, \ldots, n$, множество всех d-выпуклых подпространств размерности k.

Теорема 2. *В метрике* $\bar{\theta}$ *множество* D_{n-1} *компактно.*

Множества $D_1, D_2, \ldots, D_{n-2}$ могут быть не компактными в метрике $\bar{\theta}$. Множества $D_2, D_3, \ldots, D_{n-1}$ могут быть пустыми.

Теорема 3. *Для любого пространства* $\mathscr{R}^n$ *существуют* n *одномерных* d-*выпуклых подпространств* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *таких, что* $l_1+l_2+\ldots+l_n=\mathscr{R}^n$.

Для любого множества $K\subset\mathscr{R}^n$ через $\operatorname{int} K$ и $\operatorname{bd} K$ будем обозначать соответственно внутренность и границу множества K.

Теорема 5. *Пусть* $K\subset\mathscr{R}^n$ *— такое множество, что* $\operatorname{int} K\neq\emptyset$, $\operatorname{bd} K\neq\emptyset$. $\operatorname{bd} K\neq\emptyset$. *Тогда для любой точки* $x\in\operatorname{bd} K$ *существует* d-*выпуклая гиперплоскость* Γ_x, *опорная к множеству* K *в точке* x.

Теорема 5. *Пусть* $K\subset\mathscr{R}^n$ *— такое множество, что* $\operatorname{int}\neq\emptyset$, $\operatorname{bd} K\neq\emptyset$. *Если для любой точки* $x\in\operatorname{bd} K$ *существует опорная* d-*выпуклая гиперплоскость к множеству* K *в точке* x, *то множества* $\operatorname{int} K$ *и* $\bar{K}=\operatorname{int} K\cup\operatorname{bd} K$ *являются* d-*выпуклыми.*

Теорема 6. *Пусть* $K\subset\mathscr{R}^n$ *есть* d-*выпуклое множество. Тогда множества* $\operatorname{int} K$ *и* $\bar{K}$ *являются* d-*выпуклыми. Для любого множества* $N\subset\mathscr{R}^n$ *выполняется соотношение* $\text{d-conv}\,\bar{N}=\overline{\text{d-conv}\,N}$.

Пусть K — множество в $\mathscr{R}^n$. Гранью F_x точки $x\in K$ в K называется множество, образованное самой точкой x и всеми теми точками $y\neq x$ из K, для которых прямая, проходящая через x и y, содержит интервал, принадлежащий K и содержащий x ([2], стр. 110).

Теорема 7. *Пусть* $K\subset\mathscr{R}^n$ *представляет собой* d-*выпуклое множество. Тогда для любой точки* $x\in K$ *грань* F_x *является* d-*выпуклым множеством.*

Теорема 8. *Подпространство* $L\subset\mathscr{R}^n$ $(L\neq0)$ *является* d-*выпуклым тогда и только тогда, когда для любой точки* $x\in\operatorname{bd}\Sigma^n\cap L$ *ее грань* F_x *в* Σ^n *принадлежит* L.

Напомним, что диаметром множества $F\subset\mathscr{R}^n$ называется число $\operatorname{diam} F=\sup\limits_{x,\,y\in F}\|x-y\|$. Известно, что диаметр линейно-выпуклой оболочки ограниченного множества F равен диаметру множества F. Для ограниченного множества $F\subset\mathscr{R}^n$ множество $\text{d-conv}\,F$ может быть неограниченным. Например, в пространстве $\mathscr{R}^3$, для которого шар Σ^3 имеет форму куба, выполняется соотношение $\text{d-conv}\,\Sigma^3=\mathscr{R}^3$.

Исследуем некоторые соотношения между диаметром d-выпуклой оболочки множества F и диаметром самого F. Для любого ограниченного множества $F\subset\mathscr{R}^n$ положим

$$\alpha(F)=\frac{\operatorname{diam}(\text{d-conv}\,F)}{\operatorname{diam} F},$$

причем для $\operatorname{diam} F=0$ примем $\alpha(F)=1$. Очевидно, $\alpha(F)\geqslant1$.

Теорема 9. *Для любого ограниченного множества* $F\subset\mathscr{R}^n$ *выполняется неравенство* $\alpha(F)\leqslant\alpha(\Sigma^n)$.

Определение. Нормированное пространство $\mathscr{R}^n$ назовем d-пространством, если для любого ограниченного множества $F\subset\mathscr{R}^n$ его d-выпуклая оболочка $\text{d-conv}\,F$ также ограничена.

Следствие 1. *Пространство* $\mathscr{R}^n$ *является* d-*пространством тогда и только тогда, когда* d-*выпуклая оболочка единичного шара* $\Sigma^n\subset\mathscr{R}^n$ *ограничена.*

Множество $K\subset\mathscr{R}^n$ называется гладким телом, если $K=\bar{K}$, $\operatorname{int} K\neq\emptyset$, и для любого $x\in\operatorname{bd} K$ существует единственная гиперплоскость Γ_x, опорная к K в точке x.

Теорема 10. *Если в* $\mathscr{R}^n$ *существует хотя бы одно гладкое ограниченное* d-*выпуклое тело, то пространство* $\mathscr{R}^n$ *строго нормировано.*

Следствие 2. *Диаметр* d-*выпуклой оболочки любого ограниченного множества* $F\subset\mathscr{R}^n$ *равен диаметру множества* F *тогда и только тогда, когда единичный шар* $\Sigma^n\subset\mathscr{R}^n$ *является* d-*выпуклым.*

Теорема 11. *Пространство $\mathscr{R}^n$ является* d-*пространством тогда и только тогда, когда существуют n d-выпуклых гиперподпространств $L_1, L_2, \ldots, L_n \subset \mathscr{R}^n$, удовлетворяющих условию $\bigcap\limits_{j=1}^{n} L_j = 0$.*

Следствие 3. *Всякое двумерное пространство $\mathscr{R}^2$ является* d-*пространством.*

Пусть $\mathscr{R}^n = \mathscr{R}^1 \dot{+} \mathscr{R}^{n-1}$ — представление пространства $\mathscr{R}^n$ в виде прямой суммы двух произвольных подпространств таких, что $\dim R^1 = 1$ и $\dim \mathscr{R}^{n-1} = n-1$. Легко видеть, что множества $\Sigma^1 = \Sigma^n \cap \mathscr{R}^1$ и $\Sigma^{n-1} = \Sigma^n \cap \mathscr{R}^{n-1}$ являются единичными шарами подпространств $\mathscr{R}^1$ и $\mathscr{R}^{n-1}$ соответственно. Очевидно, $\mathrm{conv}\,(\Sigma^1 \cup \Sigma^{n-1}) \subset \Sigma^n$.

Предположим, что в некотором пространстве $\mathscr{R}^n$ существуют подпространства $\mathscr{R}^1$ и $\mathscr{R}^{n-1}$, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{conv}\,(\Sigma^1 \cup \Sigma^{n-1}) = \Sigma^n. \tag{1}$$

Теорема 12. *Пусть в пространстве $\mathscr{R}^n$ существуют подпространства $\mathscr{R}^1$ и $\mathscr{R}^{n-1}$, удовлетворяющие условию (1). Тогда пространства $\mathscr{R}^n$ и $\mathscr{R}^{n-1}$ одновременно являются* d-*пространствами или не являются таковыми. Если являются, то выполняется соотношение*

$$\alpha(\Sigma^n) = \alpha(\Sigma^{n-1}) + 1.$$

Рассмотрим пространство l_1^n, т. е. такое $\mathscr{R}^n$, в котором имеется базис $\{e_j\}_1^n$, удовлетворяющий условию: для любого $x = \sum\limits_1^n \xi_j e_j$ его норма имеет вид $\|x\| = \sum\limits_1^n |\xi_j|$. Выделим в l_1^n подпространства $L_1, L_2, \ldots, L_n$, описываемые соотношениями $L_j = \{x = \sum\limits_1^n \xi_j e_j \colon \xi_j = 0\}$.

Теорема 13. *В пространстве l_1^n существуют точно n* d-*выпуклых гиперподпространств, а именно $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Для единичного шара $\Sigma_n \subset l_1^n$ выполняется соотношение $\alpha(\Sigma^n) = n$.*

Следуя ([4]), в нормированном пространстве $\mathscr{R}^n$ введем понятия ортогональности: вектор y ортогонален вектору x, если $\|x + \beta y\| \geqslant \|x\|$ для любого вещественного β. Подпространство $M \subset \mathscr{R}^n$ называется ортогональным к подпространству $L \subset \mathscr{R}^n$, если каждый вектор $y \in M$ ортогонален всякому вектору $x \in L$. Базис $\{e_k\}_1^n$ называется ортогональным (или базисом Ауэрбаха), если при каждом $j = 1, 2, \ldots, n$ линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k \neq j}$ ортогональна к вектору e_j. В нормированном пространстве $\mathscr{R}^n$ всегда существует ортогональный базис ([4]).

Определение. Ортогональный базис $\{e_k\}_1^n$ в $\mathscr{R}^n$ назовем d-выпуклым базисом Ауэрбаха, если при каждом $j = 1, 2, \ldots, n$ линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k \neq j}$ является d-выпуклым подпространством.

В произвольном $\mathscr{R}^n$ может не существовать d-выпуклый базис Ауэрбаха. В пространстве l_1^n канонический базис $\{e_k\}_1^n$ является d-выпуклым базисом Ауэрбаха.

Теорема 14. *Если в $\mathscr{R}^n$ существует* d-*выпуклый базис Ауэрбаха, то для любого ограниченного множества $F \subset \mathscr{R}^n$ выполняется неравенство $\alpha(F) \leqslant n$.*

Теорема 15. *В двумерном пространстве $\mathscr{R}^2$ всегда существует* d-*выпуклый базис Ауэрбаха.*

Следствие 4. *Для любого ограниченного множества $F \subset \mathscr{R}^2$ верно неравенство $\alpha(F) \leqslant 2$. Если для некоторого множества $F \subset \mathscr{R}^2$ имеем $\alpha(F) = 2$, то единичный круг $\Sigma^2 \subset \mathscr{R}^2$ является параллелограммом.*

Авторы искренне признательны акад. П. С. Александрову за внимание к представленной тематике.

Кишиневский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 28 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Буземан, Геометрия геодезических, М., 1962. [2] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959. [3] В. Г. Болтянский, П. С. Солтан, Матем. сборн., **87** (127) (1972). [4] И. М. Глазман, Ю. И. Любич, Конечномерный линейный анализ, М., 1969. [5] П. С. Солтан, К. Ф. Присакару, ДАН, **198**, № 1 (1971). [6] П. С. Солтан, Некоторые экстремальные задачи на выпуклых множествах и их прикладные аспекты, Докторская диссертация, Кишинев, 1971. [7] П. С. Солтан, ДАН, **205**, № 3 (1972).