Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 517.11 **МАТЕМАТИКА**

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ЯЗЫКАХ $Я_4$, $Я_5$,...

В заметках ([1–3]) путем последовательных расширений были построены языки $Я_0$, $Я_1$, $Я_2$ и $Я_3$. При этом для языка $Я_2$ была определена «выводимость» замкнутой формулы из замкнутой формулы, основанная на некоторой полуформальной системе правил вывода S_2 ([2]). Это понятие выводимости послужило нам для построения семантики языка $Я_3$: по семантическому соглашению Сс3.2 мы условились понимать ЗФ3 $\supset|AB$, где A и B — ЗФ2, как выражающую выводимость B из A по правилам системы S_2 ([3]). Для $Я_3$ была в свою очередь определена выводимость замкнутой формулы из замкнутой формулы, основанная на некоторой полуформальной системе правил вывода S_3.

В настоящей заметке индукцией по N строятся одновременно языки $Я_N$, $N \geq 4, 5, \ldots$, и системы правил вывода для этих языков S_N, $N \geq 4, 5, \ldots$ Основанием индукции служат уже построенные язык $Я_3$ и система правил вывода S_3. Шаг индукции состоит в следующем.

Предполагается, что для данного НЧ N, большого или равного трем, построены язык $Я_N$ и система правил S_N, определяющая N-выводимость одной замкнутой формулы языка $Я_N$ из другой такой формулы. Предполагается доказанным, что система S_N семантически пригодна для языка $Я_N$ в том смысле, что всякая замкнутая формула языка $Я_N$, N-выводимая из верной замкнутой формулы этого языка, сама верна в $Я_N$. (При $N \geq 3$ все это выполнено.)

Строятся язык $Я_{N|}$ и система правил вывода $S_{N|}$, определяющая $N|$-выводимость одной замкнутой формулы языка $Я_{N|}$ из другой такой формулы. Доказывается, что система $S_{N|}$ семантически пригодна для языка $Я_{N|}$ в том смысле, что всякая замкнутая формула языка $Я_{N|}$, $N|$-выводимая из верной замкнутой формулы языка $Я_{N|}$, верна в $Я_{N|}$.

Опишем теперь это построение.

Понятие формулы языка $Я_{N|}$ [Фл $N|$] определяется следующими правилами построения:

$$\text{Фл}\,N|.1.\ \frac{A-\text{Фл}\,N}{A-\text{Фл}\,N|};\quad \text{Фл}\,N|.2.\ \frac{A, B-\text{Фл}\,N}{\supset(N-1)AB-\text{Фл}\,N|};$$

$$\text{Фл}\,N|.3.\ \frac{C, D-\text{Фл}\,N|;\ C \text{ не Фл}\,N \text{ или } D \text{ не Фл}\,N}{\& CD-\text{Фл}\,N|};$$

$$\text{Фл}\,N|.4.\ \frac{X-\text{Пн}, E-\text{Фл}\,N|, E \text{ не Фл}\,N}{\forall XE-\text{Фл}\,N|}$$

Всякая Фл $N|$ представляется в одном и только в одном из видов: A, где A — Фл N; $\supset(N-1)AB$, где A и B — Фл N; $\&CD$, где C и D — Фл $N|$ и C не есть Фл N или D не есть Фл N; $\forall XE$, где X — Пн, E — Фл $N|$ и E не есть Фл N. В каждом из этих случаев указанное представление Фл $N|$ единственно.

Параметры в языке $Я_{N|}$ [Пр $N|$] Фл $N|$ определяются следующими правилами:

Пр $N|$.1. Пр $N|$ Фл N считаются ее Пр N.

Пр $N|$.2. Пр $N|$ Фл $N|$ $\supset(N-1)AB$, где A и B — Фл N, считаются Пр $N\,A$ и Пр $N\,B$.

Пр $N|$.3. Пр $N|$ Фл $N|$ $\&CD$, где C и D — Фл $N|$ и C не есть Фл N или D не есть Фл N, считаются Пр $N|$ C и Пр $N|$ D.

Пр $N|$.4 Пр $N|$ Фл $N|$ $\forall XE$, где X — Пн, E — Фл $N|$ и E не есть Фл N, считаются Пр $N|$ E, отличные от X.

Будем называть з а м к н у т ы м и в $Я_{N|}$ [ЗФ $N|$] Фл $N|$ без Пр $N|$. Будем называть X — Фл в $Я_{N|}$ [XФ $N|$], где X — Пн, Фл $N|$, не имеющие Пр $N|$, отличных от X. Будем называть XY — Фл в $Я_{N|}$ [XYФ $N|$], где X и Y — Пн, Фл $N|$, не имеющие Пр $N|$, отличных как от X, так и от Y, и т. д.

Очевидно, что Фл N тогда и только тогда замкнута в $Я_{N|}$, когда она замкнута в $Я_N$.

Определим алгорифм $\mathfrak{E}_{N|}$ следующими равенствами:

$\mathfrak{E}_{N|}$ 1. $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons 0$.

$\mathfrak{E}_{N|}$2. $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner\supset(N-1)AB\lrcorner \rightleftharpoons 0$.

$\mathfrak{E}_{N|}$ 3. $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner\&CD\lrcorner \rightleftharpoons 1+\mathfrak{E}_{N|}\llcorner C\lrcorner+\mathfrak{E}_{N|}\llcorner D\lrcorner$.

$\mathfrak{E}_{N|}$ 4. $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner\forall XE\lrcorner \rightleftharpoons 1+\mathfrak{E}_{N|}\llcorner E\lrcorner$.

Здесь A и B — Фл N; C и D — такие Фл $N|$, что хотя бы одна из них не есть Фл N; E — Фл $N|$, не являющаяся Фл N.

Алгорифм $\mathfrak{E}_{N|}$ перерабатывает всякую Фл $N|$ в натуральное число, называемое л о г и ч е с к о й д л и н о й э т о й Фл $N|$ в я з ы к е $Я_{N|}$. Логическая длина в $Я_{N|}$ Фл A тогда и только тогда равна нулю, когда A есть Фл N или имеет вид $\supset(N-1)BC$, где B и C суть Фл N.

Определим результат подстановки в языке $Я_{N|}$ Тм T вместо Пн X в Фл $N|$ A, обозначаемый $\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XAT\lrcorner$. Определение будет индуктивным. Основанием индукции послужат случаи, когда $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner A\lrcorner \eqcirc 0$ (см. ниже п.п. $\mathfrak{F}_{N|}$ 1 и $\mathfrak{F}_{N|}$ 2). Далее, считая $\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XAT\lrcorner$ определенным при условии, что $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner A\lrcorner \leqslant M$, где M — НЧ, определим $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner XAT\lrcorner$ при $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner A\lrcorner \eqcirc M|$ (см. ниже п.п. $\mathfrak{F}_{N|}$ 3 и $\mathfrak{F}_{N|}$ 4).

$\mathfrak{F}_{N|}$ 1. $\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XAT\lrcorner \rightleftharpoons \mathfrak{F}_{N}\llcorner XAT\lrcorner$;

$\mathfrak{F}_{N|}$ 2. $\mathfrak{F}_{N|}\llcorner X\supset(N-1)ABT\lrcorner \rightleftharpoons \supset(N-1)\mathfrak{F}_{N}\llcorner XAT\lrcorner\mathfrak{F}_{N}\llcorner XBT\lrcorner$;

$\mathfrak{F}_{N|}$ 3. $\mathfrak{F}_{N|}\llcorner X\&CDT\lrcorner \rightleftharpoons \&\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XCT\lrcorner\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XDT\lrcorner$;

$$\mathfrak{F}_{N|}\ 4.\ \mathfrak{F}_{N|}\llcorner X\forall YET\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \forall YE, \text{ если } X \text{ не есть Пр } N|\ \forall YE, \\ \forall Y\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XET\lrcorner, \text{ если } X - \text{Пр } N|\ \forall YE \text{ и } Y \text{ не входит в } T, \\ \forall Z\mathfrak{F}_{N|}\llcorner X\mathfrak{F}_{N|}\llcorner YEZ\lrcorner T\lrcorner, \text{ если } X - \text{Пр } N|\ \forall YE \text{ и } Y \text{ входит в } T. \end{cases}$$

Здесь X и Y — Пн; A и B — Фл N; C и D — такие Фл $N|$, что C не есть Фл N или D не есть Фл N; E — Фл $N|$, не являющаяся Фл N; Z — самая короткая из Пн, не входящих в T и не являющихся Пр $N|$ E.

Алгорифм $\mathfrak{F}_{N|}$ перерабатывает в Фл $N|$ всякое слово вида XAT, где X — Пн, A — Фл $N|$ и T — Тм. При этом $\mathfrak{E}_{N|}\llcorner\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XAT\lrcorner\lrcorner \eqcirc \mathfrak{E}_{N|}\llcorner A\lrcorner$.

Формулируем теперь семантические соглашения, определяющие, как мы будем понимать ЗФ $N|$:

Сс $N|$.1. Всякая ЗФ $N|$ выражает на языке $Я_{N|}$ то же, что на языке $Я_N$.

Сс $N|$.2. Всякая ЗФ $N|$ вида $\supset(N-1)AB$, где A и B — ЗФ N, выражает на языке $Я_{N|}$, что B N-выводима из A (т. е. выводима из A по правилам системы S_N).

Сс $N|$.3. Всякая ЗФ $N|$ вида $\&CD$, где C и D — такие Фл $N|$, что хотя бы одна из них не есть Фл N, выражает на языке $Я_{N|}$, что обе эти Фл $N|$ верны в языке $Я_{N|}$.

Сс $N|$.4. Всякая ЗФ $N|$ вида $\forall XE$, где X — Пн, E — Фл $N|$, не являющаяся Фл N, выражает на языке $Я_{N|}$, что мы владеем методом, позволяющим для любого Вд Q установить истинность ЗФ N_1 $\mathfrak{F}_{N|}\llcorner XEQ\lrcorner$.

Таким образом, построен язык $Я_{N|}$ — определены его синтаксис (понятия Фл $N|$ и Пр $N|$, алгорифмы $\mathfrak{E}_{N|}$ и $\mathfrak{F}_{N|}$) и его семантика (семантические соглашения Сс$N|$.1 — СС$N|$.4) Для построения системы правил вывода $S_{N|}$ построим алгорифм редукции $\mathfrak{R}_N$, который определим равенствами

$\mathfrak{R}_N$ 1. $\mathfrak{R}_{N\llcorner}AB_\lrcorner \rightleftharpoons \supset (N-2)AB$;

$\mathfrak{R}_N$ 2. $\mathfrak{R}_{N\llcorner}A\supset (N-2)CB_\lrcorner \rightleftharpoons \supset (N-2)\&ACB$;

$\mathfrak{R}_N$ 3. $\mathfrak{R}_{N\llcorner}A\&DE_\lrcorner \rightleftharpoons \&\mathfrak{R}_{N\llcorner}AD_\lrcorner \mathfrak{R}_{N\llcorner}AE_\lrcorner$;

$$\mathfrak{R}_N\ 4.\ \mathfrak{R}_{N\llcorner}A\forall XF_\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \forall X\,\mathfrak{R}_{N\llcorner}AF_\lrcorner, & \text{если } X \text{ не есть Пр } (N-1)A, \\ \forall Y\,\mathfrak{R}_{N\llcorner}A\mathfrak{F}_{N\llcorner}XFY_{\lrcorner\lrcorner}, & \text{если } X - \text{Пр } (N-1)A. \end{cases}$$

Здесь A, B и C — Фл$(N-1)$; D и E — такие Фл N, что хотя бы одна из них не есть Фл$(N-1)$; X — Пн; F — Фл N, не являющаяся Фл$(N-1)$; Y — самая короткая Пн, не являющаяся ни Пр N F, ни Пр$(N-1)$ A.

Алгорифм $\mathfrak{R}_N$ перерабатывает в Фл N всякое слово вида KL, где K — Фл$(N-1)$, L — Фл N. Пр N Фл N $\mathfrak{R}_{N\llcorner}KL_\lrcorner$, где K — Фл$(N-1)$, L — Фл N, являются Пр$(N-1)$ K и Пр N L. $\mathfrak{R}_{N\llcorner}KL_\lrcorner$ тогда и только тогда есть ЗФ N, когда K — ЗФ$(N-1)$, а L — ЗФ N.

Определим теперь $N|$-выводимость одной ЗФ $N|$ из другой следующими тринадцатью правилами, в которых K, D и E — ЗФ $N|$; A, B, C — ЗФ N; X — ПН; Q — Вд; H — ХФ $N|$; G — ХФ N; I — ЗФ$(N-1)$.

ПВ $N|$.1. K может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.2. Всякая верная ЗФ $N|$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.3. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ A и $\supset(N-1)$ AB $N|$-выводимы из K, B может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.4. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\supset(N-1)$ AB и $\supset(N-1)$ BC $N|$-выводимы из K, ЗФ $N|$ $\supset(N-1)AC$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.5. Всякий раз, когда B $N|$-выводима из K, ЗФ $\supset(N-1)AB$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.6. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\supset(N-1)AB$ и $\supset(N-1)AC$ $N|$-выводимы из K, ЗФ $N|$ $\supset(N-1)$ $A\&BC$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.7. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\forall X\supset(N-1)AG$ $N|$-выводима из K, ЗФ $\supset(N-1)$ $A\forall XG$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.8. Всякий раз, когда D и E $N|$-выводимы из K, ЗФ $N|$ $\&DE$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.9. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\&DE$ $N|$-выводима из K, D может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.10. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\&DE$ $N|$-выводима из K, E может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.11. Всякий раз, когда у нас имеется общий метод, позволяющий убеждаться в $N|$-выводимости из K любой ЗФ $N|$ вида $\mathfrak{F}_{N|\llcorner}XHQ_\lrcorner$, где Q — Вд, ЗФ $N|$ $\forall XH$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.12. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\forall XH$ $N|$-выводима из K, ЗФ $N|$ $\mathfrak{F}_{N|\llcorner}XHQ_\lrcorner$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ПВ $N|$.13. Всякий раз, когда ЗФ $N|$ $\supset(N-1)$ $\&AIB$ $N|$-выводима из K, ЗФ $\supset(N-1)$ $A\mathfrak{R}_{N\llcorner}IB_\lrcorner$ может считаться $N|$-выводимой из K.

ЗФ $N|$ L может считаться $N|$-выводимой из ЗФ $N|$ K тогда и только тогда, когда в этом можно убедиться на основании правил ПВ $N|$.1 — ПВ $N|$.13. Систему этих правил мы будем обозначать $S_{N|}$.

Система правил $S_{N|}$ оказывается семантически пригодной для языка $Я_{N|}$: *всякая* ЗФ $N|$, $N|$*-выводимая из верной в языке* $Я_{N|}$ ЗФ $N|$, *верна в* $Я_{N|}$.

Этим завершается индукционный шаг — переход от $Я_N$ и S_N к $Я_{N|}$ и $S_{N|}$.

Доказательство теоремы о семантической пригодности системы $S_{N|}$ опирается на понятие $N|K$-индуктивного условия (определяемое аналогично ЗК-индуктивному условию ([3])) и относящуюся к этому понятию теорему индукции: *в случае, когда условие* У $N|K$*-индуктивно,* *всякая* ЗФ$N|$, $N|$*-выводимая из* K, *удовлетворяет условию* $У$. Чтобы с успехом применить эту теорему к доказательству семантической пригодности системы $S_{N|}$ для языка $Я_{N|}$, достаточно убедиться в том, что в случае истинности ЗФ$N|K$ условие истинности Фл$N|$ является $N|K$-индуктивным. Здесь известную трудность представляет лишь доказательство соблюдения пункта $N|$ KИ.13 для условия истинности, т. е. теоремы

$$\frac{\supset(N-1)\&AIB}{\supset(N-1)A\Re_{N\llcorner}IB_{\lrcorner}},$$

где A и B — ЗФ N, I — ЗФ $(N-1)$. Эта теорема в свою очередь доказывается с помощью теоремы индукции: в случае, когда условие $У$ NK-индуктивно $[K$ — ЗФ $N]$, всякая ЗФ N, N-выводимая из K, удовлетворяет условию $У$. В качестве $У$ здесь при фиксированных A и I может быть взято условие, налагаемое на B формулой $\supset(N-1)AR_{N\llcorner}IB_{\lrcorner}$, в качестве K — ЗФ N $\&AI$.

Слова вида $\supset NAB$, где N — НЧ, A и B — Фл $N|$, мы называем **и м п л и к а ц и я м и р а н г а** N.

Следующие теоремы показывают, что импликации различных рангов согласованы между собой.

Пусть K, L *и* M *суть* НЧ *такие, что* $K>L$ *и* $K>M$. *Пусть* A *и* B *суть как* ЗФ$L|$, *так и* ЗФ$M|$. *Тогда* ЗФ$K||$ $\supset K\supset LAB\supset MAB$ *верна в языке* $Я_{K||}$.

Пусть L *и* M — НЧ, A *и* B+ЗФ$L|$ *и вместе с тем* ЗФ$M|$. *Если тогда в* $Я_{L||}$ *верна импликация ранга* L $\supset LAB$, *то в* $Я_{M||}$ *верна импликация ранга* M $\supset MAB$.

В языке $Я_{N||}$ может быть введено как сокращение отрицание ранга N:

$$\neg NA \rightleftharpoons \supset NA(\neq),$$

где A — Фл $N|$. Имеют место законы снятия и наложения двойных отрицаний:

$$\supset K\neg M\neg NAA, \quad \supset KA\neg M\neg NA.$$

Здесь K, N, M — НЧ такие, что $N<M<K$, A — ЗФ $N|$. Отсюда следуют теоремы

$$\frac{\neg M\neg NA}{A}, \quad \frac{A}{\neg M\neg NA},$$

где M и N — НЧ такие, что $M>N$, A — ЗФ $N|$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, ДАН, 214, № 1; № 2 (1974). [2] А. А. Марков, ДАН, 214, № 3 (1974). [3] А. А. Марков, ДАН, 214, № 4 (1974).