

И. Я. ОЛЕКСИВ

КРИВЫЕ, ПРИБЛИЖАЕМЫЕ ПРОСТЫМИ КРИВЫМИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 11 VI 1973)

Целью заметки является рассмотрение задачи приближения смешанного типа, т. е. рассмотрение ситуации, когда из принадлежности отображения, допускающего аппроксимацию гомеоморфизмами, к некоторому функциональному классу требуется сделать вывод о возможности приближения его гомеоморфизмами в этом же функциональном классе. Подобные постановки задач не являются совершенно новыми ⁽¹⁾.

Мы рассматриваем непрерывное отображение отрезка $I = [0, 1]$ в плоскость E^2 . Даже в этом относительно простом случае решение оказывается весьма трудоемким.

Задачи смешанного типа для вложений плоской области в E^2 возникают, например, при рассмотрении проблемы единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками.

Итак, под кривой понимаем либо непрерывное отображение $z: I \rightarrow E^2$, либо образ $z(I)$, указывая каждый раз, что имеется в виду. Кривая называется ломаной, если $z(t)$ — кусочно-линейное отображение. Длина кривой — это вариация функции $z(t)$ на I . Говорим, что кривая $z(t)$ приближаема простыми кривыми, если $\forall \varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм $h: I \rightarrow E^2$, что $\forall t \in I \quad |z(t) - h(t)| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Если кривая конечной длины приближаема простыми кривыми, то она приближаема простыми кривыми, длины которых не больше длины исходной кривой.*

Изложим идею доказательства теоремы 1.

Для $\varepsilon > 0$ кривая $z(I)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, разбивается точками $z(0) = A_1' < A_2' < \dots < A_n' = z(1)$, $A_i' \neq A_j'$ при $1 \leq i \neq j \leq n$ на дуги диаметра меньше ε . Точки A_i' , $1 \leq i \leq n$, перенесенные по параметру на простую кривую $h(I)$ (ее можно считать ломаной), близкую к кривой $z(t)$, дают последовательность точек A_i на $h(I)$.

Дальнейшие рассуждения в доказательстве — это математическая реализация следующей мысленной процедуры. Пусть на плоскости задана конечная система колышков (точки A_i) с отверстиями, через которые протянута нить (кривая $h(I)$), закрепленная в A_1 . При протягивании нити через A_n , она, проходя через отверстия в остальных колышках, натягивается, образуя ломаную L с вершинами в точках A_i и длиной не больше длины $h(I)$. Оказывается, что при достаточно малом ε и при условии, что $h(t)$ достаточно близка к $z(t)$, ломаная L , мало отклоняясь от $z(t)$, имеет длину, примерно равную длине $z(t)$. Кроме этого, число k звеньев L обладает следующим экстремальным свойством: существует k -звеньевая ломаная, вписанная в $h(I)$, длина которой не меньше длины L . Сама ломаная L не является простой, но она удовлетворяет условиям, при которых ломаная приближаема простыми кривыми (см. ниже условия 1–3 и теорему 2). Теорема 1 будет следовать из теоремы 3.

Сформулируем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы ломаная была приближаема простыми кривыми.

Если $h: I \rightarrow E^2$ — простая кривая, $\gamma \stackrel{\text{дг}}{=} h(I)$, то любые две жордановы области $g_1(\gamma)$ и $g_2(\gamma)$ такие, что $g_1(\gamma) \cap g_2(\gamma) = \emptyset$ и $\overline{g_1(\gamma)} \cap \overline{g_2(\gamma)} = \gamma$, называются

ся сторонами кривой γ . Положительное направление движения на γ индуцирует противоположные ориентации этих сторон.

Пусть $w(t)$ — ломаная. Предполагаем, что функция $w(t)$ не имеет интервалов постоянства. Пусть интервалы Δ_i , $1 \leq i \leq m$, определяют такое разбиение I (Δ_i лежит на I левее Δ_{i+1}), что $w(t)$ линейна на каждом Δ_i и при $t \neq j$ имеем либо $w(\Delta_i) \cap w(\Delta_j) = \emptyset$, либо $w(\Delta_i) = w(\Delta_j)$. Интервалы $l_i = w(\Delta_i)$ назовем звеньями ломаной $w(t)$.

Для каждого звена l_i строятся соответствующие ему две стороны $g_1(l_i)$ и $g_2(l_i)$. Если несколько звеньев совпадают, то для определения сторон этих звеньев используются только две различные области — стороны.

Пусть $l_i = l_j$, $i \neq j$, — совпадающие звенья ломаной $w(t)$. Присоединим l_j к одной из сторон, пусть к $g_2(l_i)$, звена l_i . Тогда $g_1(l_i)$ назовем свободной от l_j стороной звена l_i , а $g_2(l_i)$ — занятой звеном l_j . Свободной от l_i стороной звена l_j назовем ту из двух сторон звена l_j , пусть $g_2(l_j)$, для которой $g_1(l_i) \cap g_2(l_j) = \emptyset$. Сторона $g_1(l_j)$ в этом случае называется занятой звеном l_i . Выбор свободных сторон для звеньев $l_i = l_j$ можно произвести двумя различными способами в зависимости от того, к какой стороне звена l_i присоединить l_j .

Допустим, что для любых пар совпадающих звеньев ломаной $w(t)$ по описанному правилу определены свободные стороны.

Рассмотрим три совпадающие звена $l_i = l_j = l_k$, $i \neq j \neq k \neq i$. Говорим, что одно звено, пусть l_j , расположено между двумя другими, если сторона $g_1(l_j)$ занята одним, а сторона $g_2(l_j)$ — другим из пары звеньев l_j, l_k .

У с л о в и е 1. Для любой тройки различных совпадающих звеньев только одно из них расположено между двумя другими.

Формулировке условий 2 и 3 предположим несколько замечаний. Пусть l_i, l_{i+1} и l_j, l_{j+1} , $i \neq j$, — две пары последовательных звеньев ломаной $w(t)$ такие, что углы (\hat{l}_i, l_{i+1}) и (\hat{l}_j, l_{j+1}) имеют общую вершину.

Допустим сначала, что ломаные $\lambda_i = l_i \cup l_{i+1}$ и $\lambda_j = l_j \cup l_{j+1}$ простые. Если для простых ломаных λ_i и λ_j существуют непересекающиеся стороны $g_p(\lambda_i)$ и $g_q(\lambda_j)$, $p, q = 1, 2$, то $g_p(\lambda_i)$ назовем свободной от λ_j , а $g_q(\lambda_j)$ — свободной от λ_i . Если свободные стороны для простых ломаных λ_i и λ_j существуют, то они называются согласованными свободными сторонами в следующих случаях: а) если никакие два звена $l_i, l_{i+1}, l_j, l_{j+1}$ не совпадают; б) если а) не выполняется, то ориентация стороны $g_p(\lambda_i)$, свободной от λ_j , совпадает с ориентацией сторон звеньев ломаной λ_i , общих для λ_i и λ_j и свободных от звеньев ломаной λ_j .

У с л о в и е 2. Для любых двух простых двузвеньевых ломаных существуют согласованные свободные стороны.

Пусть, далее, хотя бы одна из ломаных λ_i или λ_j непростая.

У с л о в и е 3. Существует непростая ломаная, пусть λ_i , между звеньями которой не расположено ни одно из звеньев λ_j .

Теорема 2. Ломаная тогда и только тогда приближаема простыми кривыми, если определения свободных сторон для ее совпадающих звеньев и для пар ее двузвеньевых ломаных можно провести так, чтобы выполнялись условия 1, 2, 3.

Из теоремы 2 легко получается следующее утверждение (см. также (2)).

Теорема 3. Если ломаная L приближаема простыми кривыми, то она приближаема простыми кривыми, длины которых не больше длины L .

Автор выражает глубокую благодарность И. Н. Песину за постановку задачи и многочисленные полезные советы при выполнении данной работы.

Львовский филиал математической физики
Института математики
Академии наук УССР

Поступило
6 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. P. Gouliarsh, Ann. Math., 68, № 2, 231 (1958). ² И. Я. Олексив, VI Всесоюз. топологич. конфер., Тез., Тбилиси, 1972, стр. 95.