Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513.88:513.83 МАТЕМАТИКА

Н. М. ЗОБИН

ТЕОРЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ЖЕВРЕЯ

(Представлено академиком С. М. Никольским 26 II 1973)

1. Пусть (m_n) и (c_n) — произвольные последовательности положительных чисел. Определим пространства $L(m_n)$ и $l(c_n)$:

$$L(m_n)=\left\{f: f\in C^\infty(\mathbf{R}),\ \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{-2}\int |f^{(n)}(x)|^2\,dx\equiv\|f\|^2<\infty\right\},$$

$$l(c_n)=\left\{(a_n): \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|c_n^{-1}\equiv|a|<\infty\right\}.$$

Основной задачей в настоящей заметке будет разыскание по фиксированной последовательности (m_n) всех таких последовательностей (c_n), чтобы существовало ограниченное (не обязательно линейное) отображение $\mathfrak{E}$: $l(c_n)\to L(m_n)$ такое, что

$$(d/dx+1)^n\mathfrak{E}a|_{x=0}=a_n,\ n=0,\ 1,\ \ldots$$

Обозначим

$$|||\psi|||_\zeta^2=\int\zeta(t)\,|\psi(t)|^2dt.$$

Теорема 1. *Для того чтобы существовало ограниченное отображение $\mathfrak{E}$: $l(c_n)\to L(m_n)$ такое, что $(d/dx+1)^n\mathfrak{E}a|_{x=0}=a_n$, $n=0, 1, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой константы C при любом k выполнялось неравенство*

$$c_k\leqslant C\inf_{\check P_k}|||\check P_k(z)|||_{1/\chi},$$

где $\check P_k(z)$ — произвольный полином с условием $\check P_k^{(k)}(i)=k!$, $\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}m_n^{-2}$.

При выполнении этого условия оператор $\mathfrak{E}$ может быть выбран линейным и непрерывным.

2. Таким образом, задача описания искомых последовательностей (c_k) решается настолько эффективно, насколько эффективно вычисляется $\inf\limits_{\check P_k}|||\check P_k(z)|||_{1/\chi}\overset{\text{def}}{=}f_k$. Нетрудно вывести равенство

$$f_k^{-1}=k!^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}|p_n^{(k)}(i)|^2,$$

где $\{p_n(x)\}$ — ортонормированные полиномы на вещественной оси с весом $\chi(x)^{-1}$.

Ясно также, что в случае квазианалитического класса $L(m_n)$ (это эквивалентно расходимости $\int \ln \chi(t) \frac{dt}{1+t^2}$) все искомые (c_k) — нулевые (так как полиномы не лежат в $L(m_n)$). Поэтому везде далее предполагаем, что $\int \ln \chi(t) \frac{dt}{1+t^2} < \infty$*.

Используя методы книги ([1]), можно получить следующий результат.

Теорема 2. *Если* $\sup\limits_k c_k k!^{-1} |\psi^{(k)}(i)| < \infty$, то *существует оператор* $\mathfrak{C}: l(c_n) \to L(m_n)$ *со свойствами, указанными в теореме* 1. *Если* $\sup\limits_k c_k k!^{-1} |\psi^{(k)}(i)| = \infty$, *то не существует даже оператора* $\mathfrak{C}: l(c_n) \to L(m_{n+1})$ *с этими свойствами.*

Здесь

$$\psi(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int \ln \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} m_n^{-2} \frac{tz+1}{t-z} \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\psi_1(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int \ln \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} m_{n+1}^{-2} \frac{tz+1}{t-z} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{Im} z > 0 \text{**}.$$

3. Аналогично п. 1 можно рассмотреть вопрос о характеризации последовательностей (c_k) таких, чтобы существовало ограниченное отображение $\mathfrak{C}: l(c_k) \to H(m_k)$ такое, что

$$\left(\frac{d}{dx} - i\right)^n \mathfrak{C}a|_{x=0} = a_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$H(m_n) = \{f\colon f\}$ аналитична в левой полуплоскости.

$$\left.\sum_{n=0} m_n^{-2} \sup_{x<0} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |f^{(n)}(z)|^2 dz \equiv \|f\|_H^2 < \infty \right\}.$$

Использованием теоремы Пэли — Винера (([3]), стр. 20) эта задача в существенном сводится к предыдущей.

Теорема 3. *Для того чтобы существовало ограниченное отображение* $\mathfrak{C}: l(c_n) \to H(m_n)$ *такое, что* $(d/dx - i)^n \mathfrak{C}a|_{x=0} = a_n$, $n = 0, 1, \ldots$, необходимо и *достаточно, чтобы*

$$c_k \leqslant C \inf_{\check{P}_k} |||\check{P}_k(x^2)|||_{1/\omega}, \quad \omega(x) = |x|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} m_n^{-2}.$$

При выполнении этого условия оператор $\mathfrak{C}$ *может быть выбран линейным и непрерывным.*

Теорема 4. *Если* $\sup\limits_k c_k (2k)!^{-1} |\psi_2^{(2k)}(i)| < \infty$, *то существует оператор* $\mathfrak{C}: l(c_k) \to H(m_k)$ *с указанными выше свойствами. Если* $\sup\limits_k c_k (2k)!^{-1} \cdot |\psi_3^{(2k)}(i)| = \infty$, *то не существует даже оператора из* $l(c_k)$ *в* $H(m_{k+1})$ *с этими свойствами;*

$$\psi_2(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int \ln \sum_{n=0}^{\infty} t^{4n+1} m_n^{-2} \frac{tz+1}{t-z} \frac{dt}{1+t^2},$$

---

* Квазианалитический случай детально разобран в ([2]).

** Отметим, что в других терминах близкие результаты были получены Б. С. Митягиным ([6]) и Л. Карлесоном ([7]).

$$\psi_3(z)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int\ln\sum_{n=0}^{\infty} t^{4n+1}m_{n+1}^{-2}\frac{tz+1}{t-z}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Теорема 5. *Условием на последовательность* (a_k), *необходимым и достаточным для того, чтобы существовала* $f\in L(m_k)$ *такая, что* $f^{(n)}(0)=a_n$, $n=0, 1, \ldots$, *является положительная определенность формы* $\sum z_n\bar z_m\cdot(C\lambda_{n+m}-a_n\bar a_m)$ *при некоторой константе* C.

Здесь $\lambda_n=\int t^n\chi(t)^{-1}dt$.

Замечание. Теоремы 1—5 можно доказывать для соответствующих пространств на отрезке (в круге). Нужно только вместо преобразования Фурье (Лапласа) пользоваться по той же схеме рядами Фурье (Тейлора). Заметим, что на этом пути можно передоказать результаты Б. И. Коренблюма [4].

4. Теоремы 1—5 дают возможность получать теоремы о продолжении для пространств типа жевреевских

$$G_a(m_n)=\{f\colon f\in C^\infty[-a, a],\quad \sup_{x,\,n}|f^{(n)}(x)|m_n^{-1}\equiv|f|_G<\infty\}.$$

Теорема 6. *Если последовательности* (m_n), $(\tilde m_n)$ *таковы, что* $\sum_0^r\binom{n}{k}m_k\leqslant Cm_n$ *(C не зависит от n), класс* $L(\tilde m_n)$ *инвариантен относительно умножения на некоторую «шапку» (финитную функцию, равную 1 в окрестности нуля) и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n n!^{-1}|\psi^{(n)}_{(\tilde m_k)}(i)|<\infty,$$

то существует линейный непрерывный оператор продолжения

$$G_a(m_n)\to G_b(\tilde m_{n+1}),\quad a<b.$$

Аналогичную теорему можно вывести из теорем 3 и 4, но в этом случае можно утверждать больше.

Теорема 7. *Если последовательности* (m_n), $(\tilde m_n)$ *таковы, что* $\sum_0^n\binom{n}{k}m_k\leqslant Cm_n$ *(C не зависит от n) и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n\,(2n)^{-1}|\psi^{(2n)}_{2,(\tilde m_k)}(i)|<\infty,$$

то существует линейный непрерывный оператор $\Lambda: G_a(m_n)\to H_a^\infty(2^{n+1}\tilde m_{n+1})\overset{\mathrm{d}}{=}\{f: f(z)$ *аналитичная в полосе* $|\mathrm{Re}\, z|<a$,

$$\sup_{n,|x|<a,y}|f^{(n)}(x+iy)|2^{-n-1}\tilde m_{n+1}^{-1}\equiv|f|^\infty<\infty\}$$

такой, что $(\Lambda f)^{(n)}(\pm a)=f^{(n)}(\pm a)$.

Отсюда получаем следующее представление: если $f\in G_a(m_n)$ и (m_n), $(\tilde m_n)$ удовлетворяют условиям теоремы 7, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{-\infty}^{\infty}b_ne^{in\pi ax},$$

причем ряды можно почленно дифференцировать сколько угодно раз. Числа $|a_n|$ и $|b_n|$ удовлетворяют оценкам, получающимся из интегральных представлений. Их явный вид не выписываем из-за громоздкости.

В случае пространства Жеврея $\gamma(\delta) = \bigcup_{H>0} G_1(H^n n!^\delta)$ получаем

Предложение 1. *Если $\delta>2$, то любая $f\in\gamma(\delta)$ имеет следующее представление:*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{in\pi x},$$

причем $|a_n|$, $|b_n| \leqslant C\exp(-\theta n^{1/\delta})^{-\infty}$. Функционалы $a_n(f)$, $b_n(f)$ линейны и непрерывны.

Обратно, любой такой ряд с теми же оценками коэффициентов сходится к f в топологии индуктивного предела на $\gamma(\delta)$.

5. Сделаем несколько замечаний о приближении функций из классов типа жевреевских при помощи алгебраических и тригонометрических многочленов.

Рассуждая так же, как в [5], стр. 119, получим

Предложение 2. *Полиномы Чебышева образуют базис в $\Gamma(m_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_1(m_{nk})$.*

Можно получить конструктивную характеристику для функций из классов типа Жеврея.

Теорема 8. а) *Если $f\in G_1(m_n)$, то $E_n f\leqslant C\inf_p \frac{2^p m_p}{(p-1)n^{p-1}}$. Если $E_n f\leqslant C\inf_p m_p n^{-p}$, то $f\in G_a(H_a{}^n m_n)$ для любого $0<a<1$ и $f\in G_1(2^n m_{2m})$.*

б) *$f\in \bigcup_{H>0} G_1(H^n m_n)$ и f периодична (т. е. $f^{(n)}(1)=f^{(n)}(-1)$, $n=0, 1, \ldots$) тогда и только тогда, когда*

$$E_n{}^* f\leqslant C\inf_p H^p m_p n^{-p}.$$

Автор искренне благодарен С. Г. Крейну и В. Р. Фридлендеру за руководство и постоянное внимание к работе, а также Б. С. Митягину за весьма полезную беседу по вопросам, затронутым в этой статье.

Воронежский лесотехнический институт

Поступило 16 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. [2] Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко, Теория функций, функц. анализ и их прилож., Республ. научн. сборник, 9, 134 (1969). [3] Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964. [4] Б. И. Коренблюм, ДАН, 164, № 1, 36 (1965). [5] Б. С. Митягин, УМН, 16, № 4 (100), 63 (1961). [6] Б. С. Митягин, ДАН, 138, № 2, 289 (1961). [7] L. Carleson, Math. Scand., 9, 197 (1961).