Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 519.2 — *МАТЕМАТИКА*

Е. Б. ДЫНКИН

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕРЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1973)

1. Пусть $(x_t, \mathbf{P})$ — марковский процесс с пространством элементарных событий Ω, определенный на случайном интервале (α, β) (см. ([1], [2])). Функция $A(\omega, \mathbf{B})$ ($\omega\in\Omega$, $\mathbf{B}$ — борелевское множество на прямой T) называется аддитивным функционалом от $(x_t, \mathbf{P})$, если: а) для всех ω $A(\omega, -)$ является σ-конечной мерой на T, сосредоточенной на (α, β); б) для любого открытого интервала I $A(-, I)$ выражается почти наверное (п.н.) через x_t, $t\in I$ (т.е. измерима относительно σ-алгебры, порожденной этими функциями и множествами меры нуль). Условимся не различать функционалы, которые совпадают (п.н.).

Назовем функционал A непрерывным, если п.н. $A\{s\}=0$ при всех s, и нормальным, если при любом s $A\{s\}$ п.н. выражается через x_t, $t\neq s$. Все непрерывные функционалы нормальны. Если при любом s x_s п.н. выражается через x_t, $t\neq s$, то все функционалы от $(x_t, \mathbf{P})$ нормальны. Так обстоит дело для право- и леворегулярных процессов * (а также для процессов, непрерывных справа или слева).

Наша цель — описать все нормальные аддитивные функционалы от марковского процесса $(x_t, \mathbf{P})$.

2. Будем предполагать, что пространство состояний E_t в каждый момент t является борелевским пространством и что множество элементарных событий Ω совпадает с множеством всех траекторий (последнее условие несущественно и вводится только для упрощения обозначений). Мера $\mathbf{P}$ не обязана быть конечной. Достаточно потребовать, чтобы были σ-конечны одномерные распределения $m_t(\Gamma)=\mathbf{P}\{x_t\in\Gamma\}$. Единственное существенное ограничение на $(x_t, \mathbf{P})$ (назовем его условием C) — это требование абсолютной непрерывности двумерных распределений процесса относительно произведения одномерных: $\mathbf{P}\{x_s\in dx, x_t\in dy\}=m_s(dx)\cdot p(s, x; t, y)m_t(dy)$. В ([3]) доказано, что функцию $p(s, x; t, y)$ можно всегда выбрать так, чтобы для любых $s<t<u$, $x\in E_s$, $z\in E_u$

$$p(s,x;u,z)=\int p(s,x;t,y)m_t(dy)p(t,y;u,z).$$

Удовлетворяющую этому уравнению функцию $p(s, x; t, y)$ мы назовем переходной плотностью процесса $(x_t, \mathbf{P})$. Формулы $p(s, x; t, dy)=$ $=p(s, x; t, y)\cdot m_t(dy)$ и $p(s, dx; t, y)=m_s(dx)p(s, x; t, y)$ задают соответственно переходную и копереходную функцию $(x_t, \mathbf{P})$. Если процесс $(x_t, \mathbf{P})$ праворегулярен, то переходную плотность можно выбрать так, чтобы функции $p(t, x_t, u, \Gamma)$ и $p(s, \Gamma, t, x_t)$ были непрерывны справа по t п.н. (последняя лишь при $t>s$). Мы назовем такую плотность канонической.

По переходной функции $p(s, x; t, dy)$ строится пространство входов E_{s+} (см. ([1])). Каждой точке $x\in E_{s+}$ соответствует марковский процесс $(x_t,$

---

* Марковский процесс $(x_t, \mathbf{P})$ с переходной функцией $p(s, x; t, \Gamma)$ называется праворегулярным, если $p(s, x_s; t, \Gamma)$ непрерывна справа по s (п.н. $\mathbf{P}$). Аналогично определяется (через копереходную функцию $p(s, \Gamma; t, y)$) леворегулярный процесс.

$\mathbf{P}_{s,x}$) с переходной функцией $p(s, x; t, dy)$, причем $\mathbf{P}_{s,x}\{\alpha=s\}=\mathbf{P}_{s,x}\{\Omega\}=1$. Аналогично по копереходной функции строятся пространство выходов и процессы $(x_t, \mathbf{P}^{s,x})$.

В ([2]) определена функция $x_{t+}(\omega)$ со значениями в E_{t+} $(\alpha(\omega)\leqslant t<\beta(\omega))$ такая, что для любого марковского процесса $(x_t, \mathbf{P})$ с переходной функцией $p(s, x; t, dy)$ пара $(x_{t+}, \mathbf{P})$ является праворегулярным процессом и при любом $\varepsilon>0$ x_{t+} п.н. выражается через x_s, $t<s<t+\varepsilon$. Процесс $(x_{t+}, \mathbf{P})$ мы назовем *правой регуляризацией* $(x_t, \mathbf{P})$. Аналогично определяется *левая регуляризация* $(x_{t-}, \mathbf{P})$ (в пространстве E_{t-}).

3. Положим $z_t=(x_{t-}, x_{t+})$ и рассмотрим в пространстве $E_{t-}\times E_{t+}$ процесс $(z_t, \mathbf{P})$. В объединении Z всех множеств $E_{t-}\times E_{t+}$, $t\in T$, вводится измеримая структура такая, что если Γ — измеримое подмножество пространства Z, то измеримо множество пар $\{(t, \omega): z_t(\omega)\in\Gamma\}$ и, следовательно, имеет смысл выражение

$$\nu(\Gamma)=\mathbf{P}\int\chi_\Gamma(z_t)A(dt) \tag{1}$$

(оно задает среднее время, проводимое в Γ траекторией z_t, если мерить время с помощью функционала A). Назовем меру ν, определенную формулой (1), *спектральной мерой аддитивного функционала* A.

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема 1. *Спектральная мера любого аддитивного функционала σ-конечна и удовлетворяет условию*

3.А. *Если $z_t\notin\Gamma$ для всех $t\in(\alpha, \beta)$ п.н., то $\nu(\Gamma)=0$.*

Всякая σ-конечная мера ν, удовлетворяющая условию 3.А, является спектральной мерой одного и только одного нормального аддитивного функционала. Этот функционал непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено условие

3.Б. *Если $z_t\in\Gamma$ не более чем для счетного множества значений t п.н., то $\nu(\Gamma)=0$.*

Из теоремы 1 вытекает, что класс всех нормальных аддитивных функционалов от $(x_t, \mathbf{P})$ совпадает с классом всех аддитивных функционалов от $(x_{t+}, \mathbf{P})$ и с классом всех аддитивных функционалов от $(x_{t-}, \mathbf{P})$.

4. Обозначим через $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_-$ и $\mathscr{E}_+$ соответственно суммы множеств E_t, E_{t-} и E_{t+}, $t\in T$. Пусть f — функция на $\mathscr{E}$. Назовем ее *правой регуляризацией* функцию на $\mathscr{E}_+$, определенную формулой $f(s+, x)=\lim\mathbf{P}_{s,x}f(t, x_t)$ при $t\downarrow s$ (если этот предел существует при всех $(s, x)\in\mathscr{E}_+$). Аналогично, *левая регуляризация* f — это функция на $\mathscr{E}_-$, определенная формулой $f(s-, x)=\lim\mathbf{P}^{s,x}f(t, x_t)$ при $t\uparrow s$. С помощью регуляризации переходной плотности $p(s, x; t, y)$ получаем функции $p(s+, x; t, y)$, $p(s, x; t-, y)$ и $p(s+, x; t-, t)$ (первая из них — правая регуляризация $f(s, x)=p(s, x; t, y)$, вторая — левая регуляризация $g(t, y)=p(s, x; t, y)$, третья является одновременно правой регуляризацией $F(s, x)=p(s, x; t-, y)$ и левой регуляризацией $G(t, y)=p(s+, x; t, y)$.

Будем говорить, что марковский процесс $(x_t, \widetilde{\mathbf{P}})$ *подчинен* марковскому процессу $(x_t, \mathbf{P})$, если

$$\widetilde{\mathbf{P}}\{x_s\in dx,\ x_t\in dy\}=g(s, x)\mathbf{P}\{x_s\in dx,\ x_t\in dy\}h(t, y). \tag{2}$$

Из (2) вытекает существование левой регуляризации функции g и правой регуляризации функции h. Назовем два процесса *подобными*, если они подчинены друг другу.

Доказательство и приложения теоремы 1 опираются на следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть A — аддитивный функционал от марковского процесса $(x_t, \mathbf{P})$. Изменив значения A на множестве $\mathbf{P}$-меры нуль, можно считать его аддитивным функционалом от всех процессов, подчиненных $(x_t, \mathbf{P})$. При этом, если $\mathbf{P}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$ связаны формулой (2), то для любой измеримой* функции $f \geqslant 0$

$$\tilde{\mathbf{P}} \int f(z_t) A(dt) = \mathbf{P} \int f(z_t) g(t-, x_{t-}) h(t+, x_{t+}) A(dt). \qquad (3)$$

Из леммы 1 нетрудно вывести, что $\mathbf{P}\{A(s, u) | x_s, x_u\} = \int p(s, x_s; t, z; u, x_u) \nu(dz)$ (п.н.), где $p(s, v; t, x, y; u, w) = p(s, v; t-, y) p(t+, x; u, w) p(s, v; u, w)^{-1}$. С помощью этой формулы доказывается, что если A — нормальный функционал и случайная величина ξ выражается через x_t, $t \in T$, то $\mathbf{P}\xi A(s, t]$ однозначно определяется спектральной мерой ν. Стало быть, нормальный функционал определяется своей спектральной мерой однозначно.

5. Наметим теперь основные этапы построения функционала A по мере ν.

Пусть $p(s-, x; t-, y)$ — переходная плотность процесса $(x_{t-}, \mathbf{P})$. Из теории ([3]) вытекает, что существует одна и только одна вероятностная мера $\varkappa_x$ в пространстве E_{s+} такая, что $p(s-, x; t-, v) = \int \varkappa_x(dy) p(s+, y; t-, v)$. Назовем x точкой ветвления, если $\varkappa_x$ не сосредоточена в одной точке. Положим $(x, y) \in D$, если $\varkappa_x$ сосредоточена в точке y. Обозначим через Q дополнение D в Z и через Q' — множество точек $(x, y) \in Q$ таких, что x не является точкой ветвления. Доказывается, что Q и Q' измеримы и п.н. множество $\Lambda(\omega) = \{t: z_t(\omega) \in Q\}$ не более чем счетно. Обозначим через $\gamma(\Gamma)$ математическое ожидание числа попаданий z_t в $\Gamma \cap Q$. Мера γ σ-конечна.

Пусть ν — σ-конечная мера, удовлетворяющая условию 3.А. Предположим сначала, что ν сосредоточена на Q. Тогда она абсолютно непрерывна относительно γ. Обозначим через q соответствующую плотность и рассмотрим на прямой дискретную меру $A\{t\} = q(z_t)$ (она сосредоточена п.н. на счетном множестве $\Lambda(\omega)$). Легко проверить, что спектральная мера A совпадает с ν.

Пусть теперь ν сосредоточена на D. Положим $\mu(B) = \nu(\pi^{-1}B)$, где π — проектирование Z на $\mathscr{E}_-$. Из 3.А. вытекает, что:

5.А. Если $x_{t-} \notin B$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$ п.н., то $\mu(B) = 0$.

Опираясь на лемму 1 и результаты Мейера о разложении супермартингалов (([4]), глава 7), мы доказываем следующее утверждение.

Лемма 2. *Если μ—σ-конечная мера в $\mathscr{E}_-$, удовлетворяющая* 5.А., *то найдется аддитивный функционал A' от процесса* $(x_{t+}, \mathbf{P})$, *такой, что*: а) *для любой измеримой функции $\varphi \geqslant 0$ в пространстве $\mathscr{E}_-$*

$$\mathbf{P} \int \varphi(x_{t-}) A'(dt) = \int \varphi(x) \mu(dx);$$

б) *спектральная мера ν' функционала A' равна нулю на Q'.*

Из а) вытекает, что $\nu'(\pi^{-1}B) = \mu(B) = \nu(\pi^{-1}B)$. Но если $\Gamma \subseteq D$, то $\Gamma = \pi^{-1}(\pi\Gamma) \cap D$ и, опираясь на б), заключаем, что $\nu'(\Gamma) = \nu(\Gamma)$. Пусть ν'' — ограничение меры ν' на Q и A'' — соответствующий функционал. Тогда спектральная мера функционала $A = A' - A''$ равна ν.

6. Все сказанное сохраняет силу, если под T понимать не всю числовую прямую, а некоторое ее подмножество. Мы остановимся на случае, когда T — положительная полупрямая и пространство состояний $E_t = E$ не зависит от t. Введем в пространство траекторий Ω преобразования сдвига $(\theta_r\omega)(t) = \omega(t+r)$ и рассмотрим соответствующие операторы на функциях ξ и мерах $\mathbf{P}$: $\theta_r\xi(\omega) = \xi(\theta_r\omega)$, $(\mathbf{P}\theta_r)(C) = \mathbf{P}(\theta_r^{-1}C)$. Назовем процесс $(x_t, \mathbf{P})$ квазиоднородным, если при любом $r > 0$ он подобен процессу $(x_t, \mathbf{P}\theta_r)$. (Этим свойством обладают, например, все процессы с однородной переходной функцией и эквивалентными распределениями m_t.) Для квазиоднородного процесса $\mathbf{P}\{x_s \in dx; x_t \in dy\} = g(s, x) q(s, dx; t, dy) h(t, y)$, где g, $h > 0$ и q удовлетворяет при всех $r > 0$, $t > s > 0$ соотношению $q(s+r, dx; t+r, dy) = \varphi_r(s) q(s, dx; t, dy) \varphi_r(t)^{-1}$ (φ положительна). Все множества $E_{t-}' = \{x: x \in E_{t-}, g(t-, x) < \infty\}$ можно естественным образом отождествить. Так же можно поступить и с множествами $E_{t+}' = \{x: x \in E_{t+}, h(t+, x) <$

$<\infty\}$. При этом сумма Z' множеств $E_{t-}'\times E_{t+}'$ по всем $t\in T$ отождествляется с произведением трех пространств $E_-'\times E_+'\times T$.

Аддитивный функционал A назовем *однородным*, если при любом $r>0$ п.н. $\theta_r A(\mathbf{B})=A(\mathbf{B}+r)$ при всех $\mathbf{B}$. Доказано, что аддитивный функционал от квазиоднородного процесса однороден тогда и только тогда, когда его спектральная мера сосредоточена на Z' и имеет вид $g(t-, x)h(t+, y)\lambda(dx, dy)$, где λ—σ-конечная мера в $E_-'\times E_+'$. Назовем ее *определяющей мерой функционала* A. Для любой измеримой функции $f\geqslant 0$ в $E_-'\times E_+'$ и любых $u>s>0$

$$\mathbf{P}\int_s^u f(z_t)A(dt)=\int_s^u\int_{E_-'\times E_+'} g(t-,x)h(t+,y)f(x,y)\lambda(dx,dy)\,dt.$$

Из теоремы 1 легко выводится, что всякая σ-конечная мера λ, удовлетворяющая условию 3.А, является определяющей для одного и только одного нормального однородного аддитивного функционала. Этот функционал непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено условие 3.Б.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, УМН. **27**, 1, 163, 43 (1972). [2] Е. Б. Дынкин, УМН, **28**, 2 (170), 35 (1973). [3] Е. Б. Дынкин, С. Е. Кузнецов, ДАН, **214**, № 1 (1974). [4] П. А. Мейер, Вероятность и потенциалы, М., 1973.