Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ЖУК

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ РАВНОМЕРНЫМИ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. М. Никольским 26 VI 1973)

В заметке приводятся некоторые точные неравенства для равномерных приближений периодических функций. Полученные результаты соприкасаются с вопросом о точных постоянных в теореме Д. Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций.

1. Примем следующие обозначения и предположения.

$\tilde{C}$ — пространство вещественных, непрерывных, 2π-периодических функций f с нормой $\|f\|=\max\limits_{x\in(-\infty,\,\infty)}|f(x)|$.

Пусть $r\geqslant 0$ — целое число. Тогда $\tilde{C}^{(r)}$ обозначает множество функций $f\in\tilde{C}$, у которых r-ая производная $f^{(r)}$, $f^{(0)}=f$, принадлежит $\tilde{C}$. $\tilde{C}_n^{(r)}$ — множество функций $f\in\tilde{C}^{(r)}$ таких, что у них все первые n коэффициентов Фурье равны нулю.

$E_n(f)=\min\|f-T_n\|$, где минимум берется по всем тригонометрическим полиномам T_n порядка не выше n.

$\omega(h,\ f)=\sup\limits_{|t|\leqslant h}\|f(x+t)-f(x)\|$ — модуль непрерывности функции f.

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{l=0}\frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$$

— известные константы Фавара. Символ 0/0 всюду понимается как 0.

$$\rho_n(f)=\sup_{|t|\leqslant\pi/(n+1)}E_n(f(x+t)-f(x)).$$

2. Теорема 1. *Пусть r — четное натуральное число, $n\geqslant 0$ — целое число. Тогда*

$$\sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}}\frac{E_n(f')^r}{\rho_n(f)^{r-1}\rho_n(f^{(r)})}=\sup_{f\in\tilde{C}_n^{(r)}}\frac{\|f'\|^r}{\omega(\pi/(n+1),f)^{r-1}\,\omega(\pi/(n+1),f^{(r)})}=\frac{K_{r-1}^r}{2^rK_r^{r-1}}$$

Теорема 2. *Пусть $r\geqslant 2$ и $n\geqslant 0$ — целые числа. Тогда*

$$\sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}}\frac{E_n(f')^r}{\rho_n(f)^{r-1}E_n(f^{(r)})}=\sup_{f\in\tilde{C}_n^{(r)}}\frac{\|f'\|^r}{\omega(\pi/(n+1),f)^{r-1}\|f^{(r)}\|}=\frac{K_{r-1}^r}{2^{r-1}K_r^{r-1}}.$$

Приведем некоторые следствия, получающиеся из сопоставления теорем 1 и 2 со следующей хорошо известной теоремой.

Теорема (см., например, ([1]), стр. 302, 304, 316). *Пусть $n\geqslant 0$ и $r\geqslant 1$ — целые числа. Тогда*

$$\sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}}\frac{(n+1)^rE_n(f)}{E_n(f^{(r)})}=\sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}}\frac{(n+1)^rE_n(f)}{\|f^{(r)}\|}=\sup_{f\in\tilde{C}_n^{(r)}}\frac{(n+1)^r\|f\|}{\|f^{(r)}\|}=K_r.$$

В силу классической теоремы Д. Джексона при любом целом $r \geqslant 0$

$$D(r) = \sup_{n \geqslant 0} \sup_{f \in \widetilde{C}^{(r)}} \{(n+1)^r E_n(f) / \omega(\pi/(n+1), f^{(r)})\} < +\infty.$$

Естественно возникает вопрос о вычислении величины $D(r)$. Н. П. Корнейчук ([2]) установил, что $D(0)=1$. В ([3]) показано, что $D(1)=\pi/4$. Следствие 1, в частности, дает ответ на этот вопрос для случая нечетного r.

Следствие 1. *Пусть r — нечетное натуральное число, $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда*

$$\sup_{f \in \widetilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{\omega(\pi/(n+1), f^{(r)})} = \sup_{f \in \widetilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{\rho_n(f^{(r)})} = \sup_{f \in \widetilde{C}_n^{(r)}} \frac{(n+1)^r \| f \|}{\omega(\pi/(n+1), f^{(r)})} = \frac{K_r}{2}.$$

Следствие 2. *Пусть $r \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$ — целые числа. Тогда*

$$\sup_{f \in \widetilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^{r(r+1)} E_n(f)^{r+1}}{\rho_n(f^{(r)})^r E_n(f^{(r)})} = \sup_{f \in \widetilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^{r(r+1)} E_n(f)^{r+1}}{\omega(\pi/(n+1), f^{(r)})^r E_n(f^{(r)})} =$$

$$= \sup_{f \in \widetilde{C}_n^{(r)}} \frac{(n+1)^{r(r+1)} \| f \|^{r+1}}{\omega(\pi/(n+1), f^{(r)})^r \| f^{(r)} \|} = \frac{K_r^{r+1}}{2^r}.$$

Следствие 3. *Пусть r и k — натуральные числа такие, что $r \geqslant 2$, $k < r$; $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда*

$$\sup_{f \in \widetilde{C}_n^{(r)}} \{\| f^{(k)} \|^r \| f \|^{k-r} \| f^{(r)} \|^{-k}\} = K_{r-k}^r K_r^{k-r}, \tag{1}$$

$$\sup_{f \in \widetilde{C}^{(r)}} \{E_n(f^{(k)})^r E_n(f)^{k-r} E_n(f^{(r)})^{-k}\} = K_{r-k}^r K_r^{k-r}. \tag{2}$$

Результаты следствия 3 ранее были известны. Соотношение (1) — хорошо известный результат Ж. Адамара — Г. Е. Шилова — А. Н. Колмогорова (см. ([4])). Равенство (2) при $r \leqslant 5$ установлено автором ([5], [6]), общий случай рассмотрен А. А. Лигуном ([7]). В заключение укажем, что некоторые частные случаи приведенных в этой заметке результатов ранее отмечались в работах ([5], [8]).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. [2] Н. П. Корнейчук, ДАН, **145**, № 3, 514 (1962). [3] В. В. Жук, Изв. высш. учебн. завед., Математика, **5** (96), 24 (1970). [4] А. Н. Колмогоров, Уч. зап. Московск. унив., **30**, 3 (1939). [5] В. В. Жук, ДАН, **196**, № 4, 747 (1971). [6] В. В. Жук, Изв. высш. учебн. завед., Математика, **1** (128), 51 (1973). [7] А. А. Лигун, Матем. заметки, **13**, № 5, 647 (1973). [8] В. В. Жук, ДАН, **201**, № 2, 263 (1971).