

Ю. С. ЗАВЬЯЛОВ

L-СПЛАЙН-ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 7 III 1973)

Предполагается новый подход к проблеме L-сплайн-функций многих переменных.

1. Пусть R^n — n -мерный параллелепипед в пространстве переменных $x=(x^1, \dots, x^n)$. Множествами гиперплоскостей

$$\Delta^j: a^j=x_0^j < x_1^j < \dots < x_{i_j}^j < \dots < x_{N^j}^j = b^j, \quad j=1, \dots, n, \quad (1)$$

он делится на ячейки R_i^n . В R^n рассматривается класс функций $W^{(m)}(R^n)$, имеющих абсолютно непрерывные производные $D^{(p)}f(x)$ (m, p — n -мерные векторы), $p_j=0, \dots, m_j-1$, и производные которых на порядок выше суммируемы с квадратом в R^n .

Задается семейство $L=(L_1, \dots, L_n)$ линейных дифференциальных операторов порядков m_j , каждый по одной переменной x^j :

$$L_j \equiv c_m^j(x^j)D^{m_j} + \dots + c_0^j(x^j)D^0, \quad j=1, \dots, n, \quad (2)$$

где $c_{\nu_j}^j(x^j) \in C^{m_j}[a^j, b^j]$, $c_m^j(x^j) \neq 0$ на $[a^j, b^j]$; L_j^* —формально сопряженные операторы.

Определение 1. L-сплайн-функций дефекта $\mu=(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $1 \leq \mu_j \leq m_j$, ассоциированной с операторами L_j , называется функция $S(x)$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$L_j^* L_j S(x) = 0, \quad j=1, \dots, n,$$

в каждой открытой ячейке R_i^n и принадлежащая классу $W^{(2m-\mu)}(R^n)$.

В случае двух переменных определение, эквивалентное определению 1, дано в монографии (1). Частный случай полиномиальных сплайн-функций нечетных степеней ($L_j \equiv D^{m_j}$) в случае n переменных и $\mu_j = m_j = \text{const}$ впервые исследовался в 1952 г. В. С. Рябенским (2).

Класс $W^{(m)}(R^n)$ представляет собой линейное пространство. Пусть $\mathcal{L}^{(m)}(R^n)$ —его фактор-пространство по многообразию $\mathfrak{R}(R^n)$ функций, удовлетворяющих в R^n системе дифференциальных уравнений $L_j \eta(x) = 0$, $j=1, \dots, n$. $\mathfrak{R}(R^n)$ является конечномерным множеством. В пространстве $\mathcal{L}^{(m)}(R^n)$ элементов f вводится норма

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{(m)}(R^n)} = \left(\int_{R^n} \sum_{j=1}^n [L_j f(x)]^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Множество $F(R^n)$ элементов, порождаемых L-сплайн-функциями, будет конечномерным подпространством в $\mathcal{L}^{(m)}(R^n)$.

Определение 2. $\mathfrak{B}^{(m)}(R^n)$ означает линейное подпространство функций $\varphi(x) \in W^{(m)}(R^n)$, которые вместе с частными производными $D^{p_j} \varphi(x)$, $p_j=0, \dots, \mu_j-1$, в гиперплоскостях множеств Δ^j являются L-сплайн-функциями $n-1$ переменных в смысле определения 1.

Гиперплоскости Δ^j и их пересечения выделяют из R^n r -мерные параллелепипеды R^r , $1 \leq r \leq n-1$, по переменным x^{α} , $\alpha=1, \dots, r$, состоящие

из ячеек R_i^r , $i = \{i_1, \dots, i_j\}$. Области R^r , лежащие в параллельных r -мерных плоскостях, одинаковы. В каждом из параллелепипедов R^r можно ввести определения 1, 2 (соответствующие понятия отмечаются индексом r). При таком подходе для каждого r получается серия пространств типа $\mathfrak{W}^{(m)}(R^r)$, отвечающих непараллельным областям R^r , а для разных $r=1, \dots, n$ — последовательность таких серий. На этой последовательности сплайн-функции $S(x)$ обладают рекуррентными свойствами.

2. В качестве примера рассмотрим задачу однородной эрмитовой интерполяции периодическими сплайн-функциями с периодами $\pi^j = b^j - a^j$, $j=1, \dots, n$.

Пересечения гиперплоскостей множеств Δ^j образуют в R^n сетку узлов Δ . Пусть на Δ задано множество значений $Y = \{y_i^{(p)}\}$ ($p_j=0, \dots, \mu_j-1$).

Задача 1. Найти периодическую функцию $S(Y; x)$ такую, что

$$D^{(p)} S(Y; x_i) = y_i^{(p)}, \quad x_i \in \Delta; \quad p_j = 0, \dots, \mu_j - 1. \quad (4)$$

Периодические функции в пространстве $\mathfrak{W}^{(m)}(R^n)$ образуют множество $\mathfrak{W}^{(m)}(\pi; R^n)$. В пространстве $\mathfrak{Q}^{(m)}(R^n)$ ему отвечает линейное многообразие элементов $\mathfrak{Q}^{(m)}(\pi; R^n)$. Обращаясь теперь к задаче 1, видим, что условия (4) достаточны для формулировки подобных задач и в областях меньшего числа измерений R^r , $r=1, \dots, n-1$.

Теорема 1. Пусть $S_r(Y; x)$ — решение задачи 1 в R^r , если оно существует, а $\varphi_r(Y; x) \in \mathfrak{W}^{(m)}(\pi; R^r)$ — функции, удовлетворяющие тем же интерполяционным условиям. Если в каждой области $R^{r-1} \subset R^r$ существует единственное решение задачи 1, то элемент $S_r(Y) \in \mathfrak{Q}^{(m)}(\pi; R^r)$ есть единственный элемент такой, что

$$\|S_r(Y)\|_{\mathfrak{Q}^{(m)}(R^r)} = \min_{\varphi_r(Y)} \|\varphi_r\|_{\mathfrak{Q}^{(m)}(R^r)}. \quad (5)$$

Доказательство осуществляется по аналогии с соответствующей теоремой в одномерной теории, т. е. через установление в r -мерном случае фундаментального тождества и первого интегрального соотношения (по терминологии работы (1)).

Теорема 2. Если в одномерных областях R^1 по каждому x^j , $j=1, \dots, n$, существует единственное решение задачи 1, то существует единственное решение $S_r(Y; x)$ этой задачи в R^r для любого $r=2, \dots, n$.

Доказательство проводится по индукции с использованием тех же приемов, что и в одномерной теореме существования и единственности (1). Напомним, что последняя имеет место, если всякое периодическое решение уравнения $L_j \eta(x) = 0$, удовлетворяющее нулевым интерполяционным условиям, тождественно равно нулю.

В многомерном случае оказываются справедливыми и другие свойства интерполяционных сплайн-функций, известные в одномерной теории (1). Так, верно свойство наилучшего приближения по норме пространства $\mathfrak{Q}^{(m)}(R^n)$. Имеет место равномерная сходимость интерполяционных процессов, если равномерно сходятся процессы в одномерных задачах. Результаты распространяются на непериодические L -сплайн-функции. Как и в случае одной переменной, в рассмотрение можно включить неоднородные условия интерполирования.

Для L -сплайн-функций многих переменных решена задача сглаживания исходных данных $Y = \{y_i^{(p)}\}$, поставленная в случае полиномиальных сплайн-функций одной переменной Шенбергом (3).

3. Предлагаемый подход отличается от известных методов. В монографии (1) фактор-пространство строится по множеству функций, удовлетворяющих в R^n уравнению $L_1 L_2 \eta(x) = 0$. Так как это множество бесконечномерно и вариационная задача рассматривается на функциях класса $W^{(m)}(R^n)$, а не $\mathfrak{W}^{(m)}(R^n)$, то она имеет неединственное решение.

В работах Атия (⁴) исследуются сепарабельные гильбертовы пространства W и \mathcal{E} . Сплайн-функция определяется как элемент в W , минимизирующий норму в \mathcal{E} на множестве элементов, сообщающих некоторой системе непрерывных линейных функционалов заданные значения. В предлагаемом методе интерполяционные условия (⁴) являются частным случаем таких функционалов. Дополнительные же условия, что многообразия, проходящие через $(n-1)$ -мерные сетки узлов, должны быть сплайн-функциями $n-1$ переменных (в предположении разрешимости задач в областях $R^{n-1} \subset R^n$), можно было бы выразить квадратичными функционалами.

Эти условия приводят к тому, что L -сплайн-функции имеют клеточную структуру. Вследствие этого фактическое построение интерполяционных сплайн-функций сводится к многократному решению одномерных задач, как в частном случае было отмечено в работе (²). В вычислительном отношении задача интерполирования имеет общие черты с разностным методом дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Связь между ними была использована в работах Н. Н. Яненко и Б. И. Квасова (⁵, ⁶) для своеобразного определения и построения сплайн-функций посредством итерационных процессов.

Автор благодарен В. А. Топоногову и акад. Н. Н. Яненко за полезные обсуждения данной работы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
1 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Дж. Алберг, Е. Нильсон, Дж. Уолш, Теория сплайнов и ее применения. «Мир», М., 1972. ² В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956. ³ I. J. Schoenberg, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52, № 4, 947 (1964). ⁴ M. Attea, Numer. Math., 12, № 3, 192 (1968). ⁵ Н. Н. Яненко, Б. И. Квасов, ДАН, 195, № 5, 1055 (1970). ⁶ Б. И. Квасов, В сборн. Численные методы механики сплошной среды, 3, № 3, Новосибирск, 1972.

