Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ЯЗЫКЕ $Я_\omega$

В заметках ([1], [2]) были построены языки $Я_N$, где N — НЧ. Каждый из языков $Я_{N|}$ является расширением $Я_N$; всякая формула языка $Я_N$ является формулой языка $Я_{N|}$, причем параметры этой формулы в языках $Я_N$ и $Я_{N|}$ совпадают; всякая формула языка $Я_N$ является замкнутой в $Я_{N|}$ тогда и только тогда, когда она замкнута в $Я_N$, и верной в $Я_{N|}$ тогда и только тогда, когда она верна в $Я_{N|}$. При переходе от $Я_N$ к $Я_{N|}$ при $N>0$ появляется новый вид импликации — импликации ранга $(N-1)$. Таким образом, в языке $Я_N$ «накапливаются» импликации рангов от нуля до $(N-2)$ включительно. Такое обилие импликаций, однако, не вредит делу ввиду их согласованности ([2]). Это дает возможность объединить языки $Я_N$ в один язык $Я_\omega$, который в известном смысле содержит каждый из языков $Я_N$ (N — НЧ). Это объединение и составляет содержание настоящей заметки.

Определим понятие формулы языка $Я_\omega$ [Флω] следующими правилами построения:

Флω.1. $\dfrac{A-\text{Фл}1}{A-\text{Фл}\omega}$;

Флω.2. $\dfrac{C \text{ и } D-\text{Фл}\omega;\ C \text{ не есть Фл1 или } D \text{ не есть Фл1}}{\&CD-\text{Фл}\omega}$

Флω.3. $\dfrac{E, F-\text{Фл}\omega}{\supset EF-\text{Фл}\omega}$; Флω.4. $\dfrac{X-\text{Пн},\ E-\text{Фл}\omega}{\forall XE-\text{Фл}\omega}$.

Всякая Флω представляется в одном и только в одном из видов: A, где A — Фл1; $\&CD$, где C и D — Флω, причем C не есть Фл1 или D не есть Фл1; $\supset EF$, где E и F — Флω; $\forall XE$, где X — Пн, E — Флω. В каждом из этих случаев указанное представление Флω единственно.

Параметры в языке $Я_\omega$ [Прω] Флω определим следующими правилами:

Прω.1. Прω Фл1 считаются ее Пр1;

Прω.2. Прω Флω $\&CD$, где C и D — Флω такие, что C не есть Фл1 или D не есть Фл1, считаются Прω C и Прω D;

Прω.3. Прω Флω $\supset EF$; где E и F — Флω, считаются Прω E и Прω F;

Прω.4. Прω Флω $\forall XE$, где X — Пн, E — Флω, считаются отличные от X Прω E.

Будем называть замкнутыми в $Я_\omega$ [ЗФω] Флω без Прω. Будем называть X-Фл в $Я_\omega$ [XФω], где X — Пн, Флω, не имеющие Прω, отличных от X. Будем называть XY-Фл в $Я_\omega$ [XYФω], где X и Y — Пн, Флω, не имеющие Прω, отличных как от X, так и от Y, и т. д.

Очевидно, что Фл1 тогда и только тогда замкнута в $Я_\omega$, когда она замкнута в $Я_1$.

Определим алгорифм $\mathfrak{E}_\omega$ следующими равенствами:

$\mathfrak{E}_\omega 1.$ $\mathfrak{E}_\omega \llcorner A \lrcorner \doteq 0$;

$\mathfrak{E}_\omega 2.$ $\mathfrak{E}_\omega \llcorner \&CD \lrcorner \doteq 1+\mathfrak{E}_\omega \llcorner C \lrcorner + \mathfrak{E}_\omega \llcorner D \lrcorner$;

$\mathfrak{E}_\omega 3.$ $\mathfrak{E}_\omega \llcorner \supset EF \lrcorner \doteq 1+\mathfrak{E}_\omega \llcorner E \lrcorner + \mathfrak{E}_\omega \llcorner F \lrcorner$;

$\mathfrak{E}_\omega 4.\quad \mathfrak{E}_{\omega}\llcorner \forall XE\lrcorner \rightleftharpoons 1+\mathfrak{E}_{\omega}\llcorner E\lrcorner.$

Здесь A — Фл1; C, D, E и F — Флω, причем C не есть Фл1 или D не есть Фл1; X — Пн.

Алгорифм $\mathfrak{E}_\omega$ перерабатывает всякую Флω в НЧ, которое мы будем называть **логической длиной в языке** $Я_\omega$ этой Флω. Логическая длина в $Я_\omega$ Флω A тогда и только тогда равна нулю, когда A есть Фл1.

Определим **результат подстановки в языке** $Я_\omega$ ТмT **в место** Пн X в Флω A, обозначаемый $\mathfrak{F}_{\omega}\llcorner XAT\lrcorner$. Определение будет индуктивным. Началом индукции послужит случай, когда $\mathfrak{E}_\omega\llcorner A\lrcorner \overline{\overline{\circ}}\, 0$ (см. ниже пункт $\mathfrak{F}_\omega 1$). Далее, считая $\mathfrak{F}_\omega\llcorner XAT\lrcorner$ определенным при условии, что $\mathfrak{E}_\omega\llcorner A\lrcorner \leqslant M$, где, M — НЧ, определим $\mathfrak{F}_\omega\llcorner XAT\lrcorner$ при условии, что $\mathfrak{E}_\omega\llcorner A\lrcorner \overline{\overline{\circ}}\, M$ (см. ниже $\mathfrak{F}_\omega 2$ — $\mathfrak{F}_\omega 4$). Формулируем пункты определения.

$\mathfrak{F}_\omega 1.\quad \mathfrak{F}_\omega\llcorner XAT\lrcorner \rightleftharpoons \mathfrak{F}_1\llcorner XAT\lrcorner;$

$\mathfrak{F}_\omega 2.\quad \mathfrak{F}_\omega\llcorner X\&CDT\lrcorner \rightleftharpoons \&\mathfrak{F}_\omega\llcorner XCT\lrcorner\mathfrak{F}_\omega\llcorner XDT\lrcorner;$

$\mathfrak{F}_\omega 3.\quad \mathfrak{F}_\omega\llcorner X\supset EFT\lrcorner \rightleftharpoons \supset\mathfrak{F}_\omega\llcorner XET\lrcorner\mathfrak{F}_\omega\llcorner XET\lrcorner;$

$$\mathfrak{F}_\omega 4.\quad \mathfrak{F}_\omega\llcorner X\forall YET\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \forall YE, & \text{если } X \text{ не есть Прω } \forall YE,\\ \forall Y\mathfrak{F}_\omega\llcorner XET\lrcorner, & \text{если } X \text{ — Прω } \forall YE \text{ и } Y \text{ не входит в } T,\\ \forall Z\mathfrak{F}_\omega\llcorner X\mathfrak{F}_\omega\llcorner YEZ\lrcorner T\lrcorner, & \text{если } X \text{ — Прω } \forall YE \text{ и } Y \text{ входит в } T. \end{cases}$$

Здесь X и Y — Пн; A — Фл1; T — Тм; C и D такие Флω, что хотя бы одна из них не есть Фл1; E и F — Флω; Z — самая короткая из Пн, не входящих в T и не являющихся Прω E.

Алгорифм $\mathfrak{F}_\omega$ перерабатывает в Флω всякое слово вида XAT, где X — Пн, A — Флω и T — Тм. При этом

$$\mathfrak{E}_\omega\llcorner\mathfrak{F}_\omega\llcorner XAT\lrcorner\lrcorner \overline{\overline{\circ}}\, \mathfrak{E}_\omega\llcorner A\lrcorner.$$

Определим алгорифм $\mathfrak{H}$ следующими равенствами:

$\mathfrak{H}1.\quad \mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons 1;$

$\mathfrak{H}2.\quad \mathfrak{H}\llcorner \&CD\lrcorner \rightleftharpoons \max\llcorner\mathfrak{H}\llcorner C\lrcorner,\ \mathfrak{H}\llcorner D\lrcorner\lrcorner;$

$\mathfrak{H}3.\quad \mathfrak{H}\llcorner \supset EF\lrcorner \rightleftharpoons 1+\max\llcorner\mathfrak{H}\llcorner E\lrcorner,\ \mathfrak{H}\llcorner F\lrcorner\lrcorner;$

$$\mathfrak{H}4.\quad \mathfrak{H}\llcorner\forall XE\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} 2, & \text{если } E \text{ — Фл1},\\ \mathfrak{H}\llcorner E\lrcorner, & \text{если } E \text{ не есть Фл1}, \end{cases}$$

Здесь A — Фл1; C, D, E и F — Флω, причем C не есть Фл1 или D не есть Фл1; X — Пн.

Алгорифм $\mathfrak{H}$ перерабатывает всякую Флω в положительное НЧ, которое мы будем называть **высотой** данной Флω. Высота Флω A тогда и только тогда равна 1, когда A — Флω.

Определим алгорифм $\mathfrak{D}$ следующими равенствами:

$\mathfrak{D}1.\quad \mathfrak{D}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons A;$

$\mathfrak{D}2.\quad \mathfrak{D}\llcorner \&CD\lrcorner \rightleftharpoons \&\mathfrak{D}\llcorner C\lrcorner\mathfrak{D}\llcorner D\lrcorner;$

$\mathfrak{D}3.\quad \mathfrak{D}\llcorner \supset EF\lrcorner \rightleftharpoons \supset N\mathfrak{D}\llcorner E\lrcorner\mathfrak{D}\llcorner F\lrcorner;$

$\mathfrak{D}4.\quad \mathfrak{D}\llcorner \forall XE\lrcorner \rightleftharpoons \forall X\mathfrak{D}\llcorner E\lrcorner.$

Здесь A — Фл1; C и D — такие Флω, что C не есть Фл1 или D не есть Фл1; E и F — Флω;

$$N \rightleftharpoons \max\llcorner\mathfrak{H}\llcorner E\lrcorner,\ \mathfrak{H}\llcorner F\lrcorner\lrcorner - 1;$$

X — Пн.

Нетрудно видеть, что алгорифм $\mathfrak{D}$ перерабатывает всякую Флω в Фл$\mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner$, причем Прω A совпадают с Пр$\mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner\mathfrak{D}\llcorner A\lrcorner$. В частности, $\mathfrak{D}$ перерабатывает всякую ЗФω A в ЗФ$\mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner$. Будучи ЗФ$\mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner$, слово $\mathfrak{D}\llcorner A\lrcorner$ выражает нечто на языке $Я_N$, где $N \rightleftharpoons \mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner$. Это дает возможность определить семантику языка $Я_\omega$ единственным семантическим соглашением:

Ссω.1. ЗФ A выражает на языке $Я_\omega$ то же, что $\mathfrak{D}\llcorner A\lrcorner$ на языке $Я_N$, где $N \rightleftharpoons \mathfrak{H}\llcorner A\lrcorner$.

В языке $Я_\omega$ в качестве сокращений могут быть введены отрицание (знак $\neg$), квазидизъюнкция (знак $\bigvee$) и квазисуществимость (знак $\dot{\exists}$):

$$\neg A \rightleftharpoons \supset A(\neq),$$

$$\dot{\bigvee} AB \rightleftharpoons \neg \& \neg A \neg B,$$

$$\dot{\exists} XA \rightleftharpoons \neg \forall X \neg A,$$

где A и B — Флω, X — Пн.

Действует правило Modus ponens: *всякий раз, когда* ЗФω A *и* B *таковы, что в* *Я*$_\omega$ *верны* ЗФω A и $\supset AB$, *в* *Я*$_\omega$ *верна* ЗФω B.

В *Я*$_\omega$ верны ЗФω следующих видов:

$$\supset A \supset BA$$

$$\supset \supset AB \supset \supset A \supset BC \supset AC$$

$$\supset A \supset B \& AB$$

$$\supset \& ABA$$

$$\supset \& ABB$$

$$\supset A \dot{\bigvee} AB$$

$$\supset B \dot{\bigvee} AB$$

$$\supset \supset AC \supset \supset BC \supset \dot{\bigvee} ABC$$

$$\supset \supset AB \supset \neg B \neg A$$

$$\supset \neg \neg AA$$

$$\supset \forall X \supset AD \supset A \forall XD$$

$$\supset \forall XD \mathfrak{F}_{\omega} \llcorner XDQ \lrcorner$$

$$\supset \mathfrak{F}_{\omega} \llcorner XDQ \lrcorner \dot{\exists} XD$$

$$\supset \forall X \supset DA \supset \dot{\exists} XDA.$$

Здесь A, B и C — ЗФω; X — Пн; D — ХФω; Q — Вд.

В языке *Я*$_\omega$ действует также следующее правило: *всякий раз, когда* ХФω D *такова, что мы имеем метод, позволяющий убедиться в истинности любой* ЗФω *вида* $\mathfrak{F}_{\omega} \llcorner XDQ \lrcorner$, *где* Q — Вд, *верна* ЗФω $\forall XD$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, ДАН, **214**, №№ 1–4 (1974). [2] А. А. Марков, ДАН, **214**, 5 (1974).