Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 518:517 *МАТЕМАТИКА*

И. Н. МОЛЧАНОВ, М. Ф. ЯКОВЛЕВ

О ДВУХШАГОВЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 14 V 1973)

В ([1]) предложены методы регуляризации для получения приближения к нормальному решению несовместных систем линейных алгебраических уравнений, имеющих вырожденную матрицу или матрицу, которая становится вырожденной при изменении ее элементов в пределах точности их задания. Для таких систем линейных алгебраических уравнений, но с симметричными матрицами в настоящей работе построены быстро сходящиеся итерационные методы получения обобщенных в смысле наименьших квадратов решений несовместных систем линейных алгебраических уравнений без трансформации Гаусса, ухудшающей свойства матриц исходной системы уравнений. Предлагаемые итерационные методы являются распространением теории регуляризации итерационных схем А. А. Самарского ([2]) на решение несовместных уравнений с неотрицательными операторами.

Пусть дана неразрешимая система n линейных алгебраических уравнений

$$Ay=f, \tag{1}$$

где

$$A=A^*, \quad (Ay,y)\geqslant 0, \quad \det(A)=0.$$

Пусть собственные значения матрицы $0=\lambda_1=\ldots=\lambda_m<\lambda_{m+1}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ и соответствующие им собственные векторы $\{v_j\}$, $j=1, 2, \ldots, n$. Подпространство, порождаемое собственными векторами $v_1, v_2, \ldots, v_m$, обозначим через $S_0{}^A$, а подпространство, порождаемое векторами $v_{m+1}, \ldots, v_n$,— через $S_1{}^A$. Поскольку система (1) неразрешима, то $(f, v_j)\neq 0$ для $j=1, 2, \ldots, m$ и можно записать

$$f=\bar f+\tilde f, \tag{2}$$

где

$$\bar f\in S_1{}^A, \quad \tilde f\in S_0{}^A, \quad (\bar f, \tilde f)=0.$$

Обобщенным решением системы (1) называется любое решение системы

$$A^*Au=A^*f=q, \quad A^2u=q, \tag{3}$$

т. е. решение совместной системы

$$Au=\bar f. \tag{4}$$

Решения системы (4) можно представить в виде

$$u=\bar u+\tilde u, \quad \bar u\in S_1{}^A, \quad \tilde u\in S_0{}^A. \tag{5}$$

Для получения обобщенного решения системы (1) можно применить итерационный процесс

$$B\left(\frac{y^{(k+1)}-y^{(k-1)}}{2\tau}+\varkappa(y^{(k+1)}-2y^{(k)}+y^{(k-1)})\right)+Ay^{(k)}=f, \tag{6}$$

$k=1, 2, 3, \ldots, B=B^*, (By, y)>0, y^{(0)}=y_0$ произвольное,

$$B\left(\frac{y^{(1)}-y^{(0)}}{\tau_0}\right)+Ay^{(0)}=f, \tag{7}$$

k — номер итерации, τ_0, $\varkappa$, τ — параметры. Полагая [2] $x^{(k)}=B^{1/2}y^{(k)}$, $\varphi=B^{-1/2}f$ и $C=B^{-1/2}AB^{-1/2}$, схему (6), (7) приведем к явному виду

$$\frac{x^{(k+1)}-x^{(k-1)}}{2\tau}+\varkappa(x^{(k+1)}-2x^{(k)}+x^{(k-1)})+Cx^{(k)}=\varphi, \tag{8}$$

$$\frac{x^{(1)}-x^{(0)}}{\tau_0}+Cx^{(0)}=\varphi, \quad k=1, 2, \ldots, \quad x^{(0)}=B^{1/2}y_0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Итерационный процесс* (6), (7) *при*

$$\tau=\frac{1}{(\gamma_1\gamma_2)^{1/2}}, \quad \tau_0=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \quad \varkappa=\frac{1}{2\tau_0} \tag{10}$$

в случае $B^{-1/2}f\in S_1^C$ *сходится к тому решению* u, *для которого* $B^{1/2}u$ *имеет одинаковую с* $B^{1/2}y_0$ *проекцию на подпространство* S_0^C, *причем верна априорная оценка*

$$\|y^{(k)}-u\|_B\leqslant q_k\|y_0-u\|_B, \tag{11}$$

$$q_k=\rho_1^k\left(1+\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}k\right), \quad \rho_1=\frac{\gamma_2^{1/2}-\gamma_1^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}+\gamma_1^{1/2}}. \tag{12}$$

В случае несовместной системы (1) *для последовательности* $y^{(k)}$, $k=1, 2, 3, \ldots$, *справедливо соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}\|r^{(k+1)}-r^{(k)}\|=0. \tag{13}$$

В теореме γ_1 и γ_2 — границы оператора C в подпространстве S_1^C, $\gamma_2\geqslant\gamma_1>0$, $r^{(k)}=Ay^{(k)}-f$, $\|r\|=(r, r)^{1/2}$, $\|x\|_B=(Bx, x)^{1/2}$.

Доказательство. Процесс (8), (9) при параметрах (12) переписывается в виде [2]

$$x^{(k+1)}=(1+\alpha)Sx^{(k)}-\alpha x^{(k-1)}+(1+\alpha)\tau_0\varphi, \tag{14}$$

$$k=1, 2, 3, \ldots, \quad x^{(1)}=Sx^{(0)}+\tau_0\varphi, \quad x^{(0)}=x_0=B^{1/2}y_0,$$

где $S=E-\tau_0C$, $\alpha=\rho_1^2$, $x^{(k)}=\bar{x}^{(k)}+\tilde{x}^{(k)}$, $\varphi=\bar{\varphi}+\tilde{\varphi}$; $\bar{x}^{(k)}$, $\bar{\varphi}\in S_1^C$; $\tilde{x}^{(k)}$, $\tilde{\varphi}\in S_0^C$.

Вводя погрешность $z^{(k)}=x^{(k)}-x^*=\bar{z}^{(k)}+\tilde{z}^{(k)}$, где $x^*\in S_1^C$ — нормальное по А. Н. Тихонову [1] решение системы

$$Cx=\bar{\varphi}, \tag{15}$$

для $\tilde{z}^{(k)}=\tilde{x}^{(k)}$ с учетом равенства $C\tilde{x}^{(k)}=0$ получим

$$\tilde{z}^{(k)}=\tilde{x}^{(k)}=\tilde{x}_0+\left[k\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{2\alpha(1-\alpha^k)}{(1-\alpha)^2}\right]\tau_0\tilde{\varphi}, \tag{16}$$

что в случае совместной системы ($\tilde{\varphi}=0$) дает

$$\tilde{z}^{(k)}=\tilde{x}_0. \tag{17}$$

С учетом (17) для $\bar{z}^{(k)}$ получим однородную задачу, для которой в [2] получена априорная оценка

$$\|\bar{z}^{(k)}\|\leqslant q_k\|\bar{z}_0\|,$$

где $\bar{z}_0=\bar{x}_0-x^*$, q_k определено в (12), и, таким образом, (11) доказано.

Для несовместной системы с учетом (16) имеем

$$\|B^{-1/2}(r^{(k+1)}-r^{(k)})\|=\|C(\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)})\|=$$
$$=\|C(\bar{z}^{(k+1)}-\bar{z}^{(k)})\|\leqslant\gamma_2(q_k+q_{k+1})\|\bar{z}_0\|<2\gamma_2 q_k\|\bar{z}_0\|,$$

откуда следует (13).

Теорема 2. *Последовательность векторов*

$$u^{(k)}=y^{(k)}-\beta_k(y^{(k+1)}-y^{(k)}),\quad k=1,2,\ldots, \tag{18}$$

$$\beta_k=\frac{k-2\alpha(1-\alpha^k)/(1-\alpha^2)}{1-2\alpha^{k+1}/(1+\alpha)} \tag{19}$$

$$\alpha=\rho_1{}^2,\qquad \rho_1=\frac{\gamma_2^{1/2}-\gamma_1^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}+\gamma_1^{1/2}},$$

сходится к тому обобщенному решению u системы (1), *для которого $B^{1/2}u$ имеет одинаковую с $B^{1/2}y_0$ проекцию на подпространство $S_0{}^C$, причем верна априорная оценка*

$$\|u^{(k)}-u\|\leqslant\bar{q}_k\|B^{-1/2}\|\,\|\bar{z}_0\|=\bar{q}_k\|B^{-1/2}\|\,\|\bar{x}_0-x^*\|, \tag{20}$$

где

$$q_k<\bar{q}_k=(1+\beta_k)q_k+\beta_k q_{k+1}<(1+2\beta_k)q_k<(1+2k)q_k.$$

Доказательство. Так как $B^{1/2}u=x^*+\tilde{x}_0$, то

$$u^{(k)}-u=B^{-1/2}[\bar{z}^{(k)}-\beta_k(\bar{z}^{(k+1)}-\bar{z}^{(k)})]. \tag{21}$$

Отсюда следует (20).

Теорема 3. *Если в итерационном процессе* (6), (7) *при $k\geqslant k_0$ выполняются неравенства*

$$\|r^{(k-1)}-r^{(k)}\|\leqslant\varepsilon, \tag{22}$$

то для $u^{(k)}$, вычисленного по формуле (18), *справедлива оценка*

$$\|u^{(k)}-u\|\leqslant\frac{[(\gamma_2^{1/2}+\gamma_1^{1/2})^2+2\gamma_1\beta_k]\varepsilon}{2\gamma_1{}^2\nu}, \tag{23}$$

где ν — оценка снизу для минимального собственного значения оператора B, β_k вычисляется по формуле (19).

Доказательство. Поскольку

$$\varepsilon\nu^{-1/2}\geqslant\nu^{1/2}\|r^{(k-1)}-r^{(k)}\|\geqslant\|B^{-1/2}(r^{(k-1)}-r^{(k)})\|=$$
$$=\|C(\bar{z}^{(k-1)}-\bar{z}^{(k)})\|\geqslant\gamma_1\|\bar{z}^{(k-1)}-\bar{z}^{(k)}\|,$$

то из уравнения для $\bar{z}^{(k)}$ получим

$$\|\bar{z}^{(k-1)}-\bar{z}^{(k+1)}\|\geqslant2\tau\gamma_1\|\bar{z}^{(k)}\|-2\tau\varkappa\frac{2\varepsilon}{\gamma_1\nu^{1/2}}.$$

Отсюда

$$\|\bar{z}^{(k)}\|\leqslant\frac{(\gamma_2^{1/2}+\gamma_1^{1/2})^2\varepsilon}{2\gamma_1{}^2\nu^{1/2}}. \tag{24}$$

Из формулы (21) следует

$$\|u^{(k)}-u\|\leqslant\frac{1}{\nu^{1/2}}\left[\|\bar{z}^{(k)}\|+\frac{\beta_k\varepsilon}{\gamma_1\nu^{1/2}}\right].$$

Последнее неравенство с учетом (24) дает оценку (23).

З а м е ч а н и я. 1. Если A и B имеют одинаковую систему собственных векторов, то: а) в случае совместной системы (1) процесс (6), (7) сходится к решению, имеющему одинаковую с начальным приближением проекцию на $S_0{}^A$; б) в случае несовместной системы (1) последовательность $\{u^{(k)}\}$ сходится к обобщенному решению, имеющему одинаковую с начальным приближением проекцию на $S_0{}^A$; в) при выборе нулевого начального приближения в обоих случаях получается нормальное по А. Н. Тихонову решение.

2. Нетрудно доказать, что вместо γ_1 при вычислениях параметров можно использовать любую величину γ, $0<\gamma\leqslant\gamma_2$. При $\gamma=\gamma_2$ процесс (6), (7) превращается в итерационный процесс

$$B(y^{(k+1)}-y^{(k)})+\frac{1}{\gamma_2}Ay^{(k)}=\frac{1}{\gamma_2}f,\qquad k=0,1,2,\ldots,\qquad y^{(0)}=y_0.$$

3. Все результаты справедливы также для итерационного процесса (6) при $y^{(0)}=y^{(1)}=y_0$ с другими значениями q_k и β_k.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Самарскому за обсуждение работы и ценные советы.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
18 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Т и х о н о в, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, № 4, 718 (1965). [2] А. А. С а м а р с к и й, Введение в теорию разностных схем, М., 1971. [3] Д. К. Ф а д д е е в, В. Н. Ф а д д е е в а, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.