

УДК 533.6.013.42

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. МАЛАМУД, В. М. РОГОВОЙ

**К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

(Представлено академиком Г. И. Петровым 14 III 1973)

Уравнение колебаний упругого тела в жидкости запишем в интегральной форме, исходя из принципа возможных перемещений, примененного к телу:

$$\delta U = - \iiint_{Q_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dQ + \iint_S \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dS + \iint_S \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dS, \quad (1)$$

где  $U$  — потенциальная энергия упругого тела,  $Q_0$  — объем тела, ограниченный поверхностью  $S$ , смоченной жидкостью;  $\mathbf{u}(M, t)$  — вектор упругих смещений,  $M$  — переменная точка трехмерного пространства,  $\mathbf{F}$  — вектор поверхностных нагрузок (за исключением жидкости),  $\mathbf{P}$  — вектор напряжений в жидкости,  $\rho_0$  — плотность упругого тела,  $\delta$  означает вариацию соответствующей величины.

Будем рассматривать малые колебания тела в жидкости. При этом будем полагать, что кинематическая вязкость жидкости мала,  $\nu \ll 1$ , и движение происходит при больших числах Рейнольдса.

Движение жидкости описывается системой линеаризованных уравнений Навье — Стокса с граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= - \nabla p / \rho + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } Q, \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{на } S, \quad |\mathbf{v}| \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(M); \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $\mathbf{v}(M, t)$  — скорость,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $Q$  — область, занимаемая жидкостью.

Система уравнений (1), (2) замыкается выражением для вектора  $\mathbf{P}$ , которое запишем в проекциях на оси криволинейной ортогональной системы координат  $\alpha_i$  с коэффициентами Ламэ  $H_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , такой, что  $\alpha_3=0$  совпадает с поверхностью  $S$ ,  $\alpha_3 > 0$  соответствует области  $Q$ , занимаемой жидкостью (1):

$$\begin{aligned} P_1 &= -\rho \nu \left\{ \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{v_1}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{v_3}{H_3} \right) \right\}, \\ P_2 &= -\rho \nu \left\{ \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{v_2}{H_2} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{v_3}{H_3} \right) \right\}, \\ P_3 &= -p + 2\rho \nu \left\{ \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \frac{v_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) при присоединении к ним начальных условий  $\mathbf{u}(M, 0) = \mathbf{u}_0(M)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(M, 0) = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_0$  полностью описывают динамику упругого тела в вязкой несжимаемой жидкости.

Решение задачи гидродинамики (2) ищется методом пограничного слоя, предложенным в работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника (2) и нашед-

шим широкое применение в задачах о движении твердого тела с вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса (3).

В первом приближении асимптотическое решение задачи представляется в виде

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi^0 + v^{1/2} \nabla \varphi^1 + \mathbf{w}, \quad p = -\varphi_t^0 - v^{1/2} \varphi_t^1 + c(t), \quad (4)$$

где потенциал скоростей идеальной жидкости  $\varphi^0$  определяется из решения краевой задачи

$$\Delta \varphi^0 = 0 \text{ в } Q; \quad \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \text{ на } S, \quad |\nabla \varphi^0| \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty; \quad (5)$$

здесь  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $S$ , внутренняя к области  $Q$ .

Проекция функции погранслоя  $\mathbf{w}$  на нормаль к  $S$  —  $w_3$  и на касательную плоскость  $w_\tau$  определены квадратурами:

$$w_3 = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t \frac{\text{Div}[\mathbf{u}_\tau - \nabla \varphi^0]_s}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\alpha_3^2}{4v(t-\tau)}\right\} d\tau, \quad (6)$$

$$w_\tau = \frac{\alpha^3}{2\sqrt{v\pi}} \int_0^t \frac{[\mathbf{u}_\tau - \nabla \varphi^0]_s}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\alpha_3^2}{4v(t-\tau)}\right\} d\tau;$$

здесь индекс  $\tau$  означает частную производную по времени, а индекс  $S$  — что соответствующие величины берутся на поверхности упругого тела  $S$ .

Поправка  $\varphi^1$  к потенциальной составляющей скорости жидкости должна определяться из решения задачи Неймана:

$$\Delta \varphi^1 = 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial \varphi^1}{\partial n} = -\frac{w_3}{\sqrt{v}} \text{ на } S, \quad |\nabla \varphi^1| \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty.$$

Решение (4) аппроксимирует точное решение задачи (2) вне области погранслоя  $Q_s$ , примыкающей к поверхности  $S$ , с погрешностью порядка  $O(v)$ . В пограничном слое функции (4) аппроксимируют нормальную к  $S$  компоненту  $v$  с погрешностью  $O(v)$ , а функцию  $p$  и касательную составляющую  $\mathbf{v}$  — с погрешностью  $O(v^{1/2})$ .

Компоненты вектора гидродинамических напряжений  $\mathbf{P}$  на основании (3) — (7) определяются следующими соотношениями:

$$P_\tau = -\rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t \frac{\mathbf{u}_{\tau\tau} - \nabla \varphi_{\tau\tau}^0}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad P_3 = -p + 2\rho v \text{ Div } w_\tau. \quad (7)$$

Равенства (7) позволяют получить для работы гидродинамических сил на перемещении  $\delta \mathbf{u}$  выражение с точностью до членов порядка  $O(v)$ :

$$\iint_S \mathbf{P} \delta \mathbf{u} = -\rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \iint_S \left[ \int_0^t \frac{[\mathbf{u}_{\tau\tau} - \nabla \varphi_{\tau\tau}^0]_s}{\sqrt{t-\tau}} d\tau (\mathbf{u}_t - \nabla \varphi^0) dt \right] dS + \iint_S \varphi_t^0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (8)$$

При выводе выражения (8) существенно используется граничное условие для потенциала  $\varphi^1$  на поверхности  $S$ . Окончательное выражение работы, как следует из (8), зависит только от гидродинамического потенциала идеальной жидкости  $\varphi^0$ .

Дифференциальную формулировку задачи о собственных колебаниях упругого тела в идеальной жидкости нетрудно получить, полагая в (1), (5) и (8)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(M) e^{\lambda t}, \quad \varphi^0 = \lambda \varphi_0^0(M) e^{\lambda t}; \quad \mathbf{F} = 0; \quad v = 0 \quad (9)$$

и приравнивая коэффициенты при независимых перемещениях.

$$L\mathbf{u}_0 + \lambda^2 \mathbf{u}_0 = -\lambda^2 \varphi_0^0 \delta_0 (M - M_s), \quad A\mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \varphi_0^0 = 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial \varphi_0^0}{\partial n} = \mathbf{u}_0 \mathbf{n} \text{ на } S, \quad |\nabla \varphi_0^0| \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty;$$

здесь  $L$  — матрица дифференциальных операторов,  $\delta_0 = 1$  при  $M = M_s$ ;  $\delta_0 = 0$  при  $M \neq M_s$ .  $A$  — дифференциальный оператор, описывающий граничные условия. Конкретный вид операторов  $L$ ,  $A$  определяется выбранным вариантом теории, описывающей упругое тело, т. е. выбором выражения потенциальной энергии  $U$ . В общем случае первое из уравнений (10) должно выполняться в объеме  $Q_0$ . Для тонкостенных стержней и оболочек оно выполняется на  $S$ , а дифференциальные операторы  $L$  отнесены к линиям главных кривизн поверхности (4).

Задача (10) является задачей гидроупругости тела в идеальной жидкости, решение которой найдено для многих частных случаев (5, 6). В дальнейшем будем полагать, что уравнение (10) решено и найдены собственные числа  $\lambda_n$  и собственные функции  $\mathbf{u}_n$ ,  $\varphi_n$ .

Решение уравнений (1) и (8) будем искать методом Галеркина, полагая

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n q_i(t) \mathbf{u}_i, \quad \varphi^0 = \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i; \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_j \delta q_j(t), \quad (11)$$

$$\nabla \varphi^0 dt = \nabla \varphi_j \delta q_j(t).$$

Приравнивая выражения при независимых вариациях  $\delta q_j$ , получим уравнения для определения  $q_i(t)$

$$a_i \ddot{q}_i(t) + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sum_{j=1}^n b_{ij} \int_0^t \frac{\ddot{q}_j(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + c_i q_i(t) = Q_i \quad (12)$$

и начальные условия, из начальных условий для  $\mathbf{u}$  и  $\partial \mathbf{u} / \partial t$ ,

$$q_i = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_{i0} \text{ при } t=0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени,

$$a_i = \iiint_{Q_0} \rho_0 \mathbf{u}_i^2 dQ_0 - \rho \iint_S \varphi_i \mathbf{u}_i \mathbf{n} dS, \quad (13)$$

$$c_i = \iiint_{Q_0} \mathbf{T}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i dQ_0, \quad Q_i = \int_S \mathbf{F} \mathbf{u}_i dS,$$

$$b_{ij} = b_{ji} = \rho \iint_S (\mathbf{u}_j - \nabla \varphi_j) (\mathbf{u}_i - \nabla \varphi_i) dS.$$

$\mathbf{T}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  — векторы усилий и деформаций упругого тела, соответствующие смещению  $\mathbf{u}_i$ . Для тонкостенных конструкций интегрирование по  $Q_0$  в (13) заменяется интегрированием по поверхности  $S$ . Решение системы интегродифференциальных уравнений (13) можно провести обычными методами, например, используя преобразование Лапласа (3).

Московский физико-технический институт  
Долгопрудный Московск. обл.

Поступило  
5 II 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Д. Н. Хант, Динамика несжимаемой жидкости, М., 1967. <sup>2</sup> М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, № 5, 3 (1957). <sup>3</sup> Ф. Л. Черноусько, Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, М., 1968. <sup>4</sup> В. В. Новожиллов, Теория тонких оболочек, Л., 1962. <sup>5</sup> F. Kito, Principles of Hydro-elasticity, Токуо, 1970. <sup>6</sup> Е. Н. Мнев, А. К. Перцев, Гидроупругость оболочек, Л., 1970.