Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 532:534.13 ГИДРОМЕХАНИКА

В. А. ПРОКОФЬЕВ

РАЗВИТИЕ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАССЕИВАЮЩЕМ, ИЗЛУЧАЮЩЕМ, ПОГЛОЩАЮЩЕМ ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 4 VI 1973)

Получены интегралы линеаризированных относительно состояний покоя и равновесия уравнений радиационной гидромеханики, имеющие форму синусоидальных волн, рядов Фурье и интегралов Фурье. На их основе решена задача Коши о распространении начальных возмущений в безграничной среде без внешних массовых сил.

1. Будем пользоваться уравнением переноса радиации [1]

$$\Omega\nabla' J_\nu'(\mathbf{x}', t', \Omega) + (k_\nu' + \sigma_\nu') J_\nu'(\mathbf{x}', t', \Omega) =$$
$$= k_\nu' E_\nu' + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\nu\Omega)} \sigma_{\nu_1}' J_{\nu_1}'(\mathbf{x}, t', \Omega_1)\,\Gamma(\nu_1\Omega_1 \to \nu\Omega)\, d(\nu_1\Omega_1), \qquad (1)$$

где обозначения те же, что и в [2]; $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, Ω — единичный вектор вдоль направления переноса радиации, k_ν', $k_\nu' E_\nu'$, σ_ν' — соответственно объемные коэффициенты абсорбции, эмиссии, рассеяния — могут зависеть от ρ, T, J_ν; $d(\nu\Omega)=d\nu\, d\Omega$; $\Gamma(\nu_1\Omega_1\to\nu\Omega)/(4\pi)$ — функция распределения рассеянной радиации, может зависеть от $\mathbf{x}$, t, удовлетворяет условиям «нормировки» и равновесия

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\nu\Omega)} \Gamma(\nu_1\Omega_1 \to \nu\Omega)\, d(\nu\Omega) = 1;$$
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\nu\Omega)} \sigma_{\nu_1 0} J_{\nu_1 0}\Gamma_0(\nu_1\Omega_1 \to \nu\Omega)\, d(\nu_1\Omega_1) = \sigma_{\nu 0} J_{\nu 0}. \qquad (2)$$

В линеаризированные уравнения S гидромеханики [2] войдут безразмерные радиационный приток тепла R и уравнение переноса радиации

$$R = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\nu\Omega)} \tau_{\nu 0} a_\nu'(J_\nu - E_\nu)\, d(\nu\Omega), \quad a_\nu' = J_{\nu 0}'/B^*; \qquad (3)$$

$$(\Omega\nabla) J_\nu(\mathbf{x}, t, \Omega) = \tau_{\nu 0}[a_{1\nu}\rho + a_{2\nu}T - (1 + \lambda_{\nu 0} - a_{3\nu}) J_\nu] +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\nu_1\Omega_1)} s_{\nu_1 0} B_{\nu_1 0}' B_{\nu 0}'^{-1} J_{\nu_1}(\mathbf{x}, t; \Omega_1)\,\Gamma_0(\nu_1\Omega_1 \to \nu\Omega)\, d(\nu_1\Omega_1); \qquad (4)$$

$$\tau_{\nu 0} = k_{\nu 0}' L, \quad s_{\nu 0} = \sigma_{\nu 0}' L, \quad \lambda_{\nu 0} = \sigma_{\nu 0}'/k_{\nu 0}',$$
$$a_{1\nu},\ a_{2\nu},\ a_{3\nu} = (\partial \ln E_\nu'/\partial \ln \rho', \quad \partial \ln T', \quad \partial \ln J_\nu')_0.$$

2. Система S обладает интегралами в форме плоских синусоидальных волн $\rho, T, \mathbf{v}, \ldots = (\rho^*(t), T^*(t), \mathbf{v}^*(t), \ldots)\exp(-i\lambda\mathbf{x})$. Уравнение (1) примет вид

$$g_j(\nu\Omega) = f(\nu\Omega) + k\int\limits_{(\nu\Omega)} g_j(\nu'\Omega') K_j(\nu\Omega, \nu'\Omega')\, d(\nu'\Omega'), \quad j = 1, 2; \qquad (5)$$

$$J_\nu(t,\Omega)=a_{1\nu}g_1(\nu\boldsymbol{\Omega})\rho^*(t,\lambda)+a_{2\nu}g_2(\nu\boldsymbol{\Omega})T^*(t,\lambda); \quad (6)$$

$$f(\nu\boldsymbol{\Omega})=\frac{i\tau_{\nu 0}}{\lambda(\mu+iw_\nu)},\quad K_j=\frac{s_{\nu'0}B'_{\nu'0}a_{j\nu'}}{s_{\nu0}B_{\nu0}{}'a_{j\nu}}\frac{\Gamma_0(\nu'\boldsymbol{\Omega}'\to\nu\boldsymbol{\Omega})}{\mu+iw_\nu}; \quad (7)$$

$$\mu=\boldsymbol{\lambda\Omega}/\lambda,\quad w_\nu=(1+\lambda_{\nu0}-a_{3\nu})/\lambda,\quad k=is_{\nu0}/4\pi\lambda.$$

Уравнение (5) фредгольмово, заданные функции, в силу их физического смысла, принадлежат классу C, L или L_2. Единственное решение его в соответствующем классе функций известно [3–6]. Через найденные g_j получим

$$R^*(t,\lambda)=R^{(1)}\rho^*+R^{(2)}T^*, \quad (8)$$

$$R^{(j)}=\frac{i}{4\pi}\int\limits_{(\nu\boldsymbol{\Omega})}a_\nu{}'a_{j\nu}g_j(\nu\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\lambda\Omega}\,d(\nu\boldsymbol{\Omega})=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\nu)}a_\nu{}'\tau_{\nu0}a_{j\nu}\left\{(1-a_{3\nu})\int\limits_{\Omega}g_j(\nu\boldsymbol{\Omega})\,d\Omega-4\pi\right\}d\nu.$$

Функции ρ^*, T^*, $\psi^*\equiv\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}^*/\lambda$ определятся системой

$$\dot\rho^*=i\lambda w\psi^*,\quad \dot{\mathbf{v}}^*=i\lambda w\gamma^{-1}(\rho^*+h_2T^*/h_1)+\lambda wN_{\mathrm{Re}}{}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}\psi^*-\lambda\mathbf{v}^*)-X_1\lambda w\psi^*, \quad (9)$$

$$h_2\dot T^*/h_1=i(\gamma-1)\lambda w\psi^*-\lambda wY_1T^*+\lambda wY_{11}h_1\rho^*/h_2,$$

$$Y_1=\lambda w\theta-{}^1/_4ZR^{(2)}/\lambda,\quad Y_{11}={}^1/_4h_2ZR^{(1)}/(h_1\lambda),$$

$$\theta=\lambda_0/(c_{\nu0}c_0{}^2\rho_0t_0),\quad w=v^{-1}=c_0t_0/L.$$

Характеристическое уравнение системы ($\rho^*,\ \ldots\ \sim\rho_0{}^*,\ \ldots\ \exp\lambda wnt$) имеет вид

$$n^3+(X_1+Y_1)n^2+(1+X_1Y_1)n+(Y_1+Y_{11})\gamma^{-1}=0. \quad (10)$$

Возможны четыре варианта ($\operatorname{Re}n_k\leqslant0$, $\lambda\geqslant0$: один корень действительный ($n_1=-n_0$), два комплексных ($n_{2,3}=-n_r\pm n_i$); все корни действительные разные; имеется двухкратный корень ($n_2=n_3$), корень трехкратный). Соответственно этому общее решение для любого из параметров T^*, ρ^*, ψ^* запишется в одной из форм:

1) $C_1\exp(-\lambda wn_0t)+2(C_r\cos\lambda wn_it+C_i\sin\lambda wn_it)\exp(-\lambda wn_rt)$, $C_{2,3}=C_r\mp iC_i$;
2) $\sum C_k\exp(\lambda wn_kt)$;
3) $C_1\exp(-\lambda wn_0t)+(C_2+C_3\lambda wt)\exp(\lambda wn_2t)$; (11)
4) $(C_1+C_2\lambda wt+C_3\lambda^2w^2t^2)\exp(-\lambda wn_0t)$.

3. При чистом рассеянии функция переизлучения заменяется индикатрисой рассеяния $\gamma_{\nu0}(\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega})$, оператор Фредгольма применяется на ограниченном множестве $\Omega=(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$:

$$g_j(\nu\boldsymbol{\Omega})=g_\nu(\Omega)=f(\nu,\Omega)+k\int\limits_{(\Omega)}g_\nu(\Omega')K(\Omega,\Omega')\,d\Omega'; \quad (12)$$

$$J_\nu{}^*(\Omega,t)=g_\nu(\Omega)(a_{1\nu}\rho^*+a_{2\nu}T^*),\quad K(\Omega,\Omega')=f_\nu(\nu,\Omega)\gamma_{\nu0}(\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega}). \quad (13)$$

Свободный член $f(\nu,\Omega)$ — непрерывная функция Ω в замкнутой области (Ω). Индикатриса рассеяния — интегрируемая неотрицательная функция в замкнутой области $(\Omega\times\Omega)$, удовлетворяющая условиям «нормировки» и равновесия для каждого ν. Ядро (считаем $m_\nu>0$)

$$K(\Omega,\Omega')\subset L(\Omega\times\Omega),\quad \int\limits_{(\Omega)}|K(\Omega,\Omega')|\,d\Omega\leqslant4\pi m_\nu{}^{-1}, \quad (14)$$

$$m_\nu=|1+\lambda_{\nu0}-a_{3\nu}|.$$

Единственное ограниченное решение уравнения ([12]) можно представить рядом Неймана

$$g_\nu(\Omega)=f(\nu,\Omega)+\sum_{n=1}^{\infty} k^n f^n A^n\{f(\nu,\Omega)\},$$

$$A^n\{f(\nu,\Omega)\}=\int\limits_{(\Omega)}\gamma_{\nu 0}(\mathbf{\Omega}'\to\mathbf{\Omega})A^{n-1}\{f(\nu,\Omega')\}d\Omega', \tag{15}$$

$$A^1\{f(\nu,\Omega)\}=\int\limits_{(\Omega)}\gamma_{\nu 0}(\mathbf{\Omega}'\to\mathbf{\Omega})f(\nu,\Omega')\,d\Omega',$$

для абсолютной и равномерной сходимости которого достаточно, чтобы

$$s_{\nu 0}<m_\nu\tau_{\nu 0}, \tag{*}$$

а это всегда выполняется при $a_{3\nu}<1$, $\tau_{\nu 0}>0$.

Если $\gamma_{\nu 0}(\mathbf{\Omega}'\to\mathbf{\Omega})\subset L_2(\Omega\times\Omega)$, то решение из $L_2(\Omega)$ существует, единственно, представимо рядом Неймана (или через резольвенту ядра), который сходится в среднем при достаточном условии

$$s_{\nu 0}<4\pi\lambda\|\gamma_{\nu 0}(\mu^2+w_\nu^2)^{-1}\|^{-1}. \tag{**}$$

Это заведомо выполняется для любого w_ν, если выполняется (*).

Используя неравенство Буняковского, получим другое достаточное условие сходимости ряда

$$s_{\nu 0}<|s_{\nu 0}+(1-a_{3\nu})\tau_{\nu 0}|\,\{|w_\nu|\ln[(1+(1+w_\nu^2)^{1/2})|w_\nu|^{-1}\}^{-1}, \tag{16}$$

при выполнении которого (**) заведомо удовлетворяется. С изменением $|w_\nu|$ от 0 до ∞ правая часть (16) изменяется от ∞ до $|m_\nu\tau_{\nu 0}|$. При дополнительном условии $\|\gamma_{\nu 0}\|<A=\text{const}$ ряд Неймана сходится абсолютно и равномерно.

4. Обычно считается $\gamma_\nu=\gamma_\nu(\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})$ и ядро уравнения становится вырожденным. Широкий набор встречающихся на практике γ_ν дается суммой полиномов Лежандра P_n

$$\gamma_\nu(\mathbf{x},t;\mathbf{\Omega}'\to\mathbf{\Omega})=\sum\omega_{\nu n}(\mathbf{x},t)P_n(\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}),\qquad \omega_{\nu 0}=1. \tag{17}$$

При $\omega_{\nu n}=0$, $n>2$, решение уравнения (12) имеет вид (ω_1, ω_2 — константы)

$$J_\nu^*(\mu,\lambda)=i\tau_{\nu 0}(a_{1\nu}\rho^*+a_{2\nu}T^*)\frac{A_0+A_1\mu+A_2\mu^2}{\lambda(\mu+iw_\nu)\Delta},$$

$$\Delta\equiv 1-{}^1/_4\frac{s_{\nu 0}}{\lambda}I_1+\frac{s_{\nu 0}^2}{4\lambda^2}I_2-\frac{s_{\nu 0}^3}{8\lambda^3}I_3,$$

$$I_1=w_\nu(4\omega_1-3\omega_2-9\omega_2 w_\nu^2)+[4+\omega_2+2(3\omega_2-2\omega_1)w_\nu^2+9\omega_2 w_\nu^4]\operatorname{arcctg} w_\nu, \tag{18}$$

$$I_2=4\omega_1-3(3+\omega_1)\omega_2 w_\nu^2-[4\omega_1-(3+\omega_1)\omega_2(1+3w_\nu^2)]\operatorname{arcctg} w_\nu,$$

$$I_3=2\omega_1\omega_2[-3w_\nu+(1+3w_\nu^2)\operatorname{arc\,ctg} w_\nu],$$

$$A_0=1-\frac{s_{\nu 0}w_\nu}{4\lambda}[4\omega_1-9\omega_2 w_\nu^2-(4\omega_1-3\omega_2-9\omega_2 w_\nu^2)w_\nu\operatorname{arcctg} w_\nu]+\frac{s_{\nu 0}^2 w_\nu}{8\lambda^2}I_3,$$

$$A_1=\frac{is_{\nu 0}}{\lambda}\left[\omega_1(1-w_\nu\operatorname{arcctg} w_\nu)-\frac{s_{\nu 0}\omega_2}{8\lambda}I_3\right],\qquad A_2=-\frac{3s_{\nu 0}}{8\lambda\omega_1}I_3,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Omega)}g_\nu(\Omega)\,d\Omega=\int\limits_{-1}^{1}g_\nu(\mu)\,d\mu=\frac{2\tau_{\nu 0}}{\Delta}\Big\{\operatorname{arcctg} w_\nu-\frac{s_{\nu 0}}{4\lambda}[4\omega_1-9\omega_2 w_\nu^2-$$

$$-(4\omega_1-3\omega_2-9\omega_2 w_\nu^2)\, w_\nu \operatorname{arcctg} w_\nu] - \omega_1\omega_2 \frac{s_{\nu 0}^2}{4\lambda^2}[3w_\nu - (1+3w_\nu^2)\operatorname{arcctg} w_\nu]\Big\}.$$

При $a_{3\nu}=0$ изотропное рассеяние $(\omega_1=\omega_2=0)$ уменьшает Y_1.

5. Интегралы в виде тригонометрических рядов получатся суммированием найденных выше синусоидальных решений.

Трехкратным преобразованием Фурье по координатам исходной линеаризованной системы уравнений радиационной газовой динамики приходим к тем же уравнениям для трансформаций Фурье T^*, ρ^*, $\psi^*(\lambda, t)$ и к тем же решениям, что и для синусоидального возмущения; тем самым выше найдены и решения в виде интегралов Фурье.

6. Задача Коши; найти T, ρ, ψ, удовлетворяющие при $\mathbf{x}\subset E$, $t>0$ системе S, а при $t=0$ принимающие заданные значения $T^0(\bar{x})$, $\rho^0(\bar{x})$, $\psi^0(\bar{x})$.

В случае синусоидальных начальных возмущений $T^0, \ldots = (T_0^*, \ldots)\times \times \exp(-i\bar{\lambda}\bar{x})$ решение сводится к задаче Коши для системы (9) при $T^*(0, \lambda), \ldots = T_0^*(\lambda), \ldots$ Каждому простому корню (10) соответствует решение

$$i\psi_k^* = n_k\rho_k^*, \qquad h_2T^*/h_1 = -[1+\gamma n_k(n_k+X_1)]\rho_k^*, \qquad \mathbf{v}_k^* = -i\lambda_k n_k\rho_k^*/\lambda, \qquad (19)$$

$$\rho_k^* = C_k \exp \lambda w n_k t, \qquad C_k = \Delta_k\Delta^{-1}, \qquad \Delta \equiv -(n_1-n_2)(n_2-n_3)(n_3-n_1),$$

$$\Delta_k = (n_l - n_m)[n_l n_m \rho_0^* - \rho_0^*/\gamma - h_2T_0^*/\gamma h_1 - (X_1+n_l-n_m)i\psi_0^*],$$

k, l, m образуют циклические перестановки из 1, 2, 3.

7. Задача об установлении движения, вызванного произвольными начальными возмущениями, сводится к обращениям трансформаций Фурье $f^*(t, \lambda)$. Последние определяются выписанными выше формулами, где теперь $f_0^*(\lambda)$ — трансформации Фурье начальных функций, которые должны удовлетворять условиям существования преобразований и обращений Фурье и условиям, налагаемым исходными дифференциальными уравнениями ([7–9]).

Из анализа характеристического уравнения видно, что кратные корни в пространстве (γ, X_1, Y_1) могут быть лишь на изолированных многообразиях не выше двумерных и при обращении Фурье они не влияют на результаты, кроме, может быть, исключительных случаев, когда интегрирование совершается вдоль конечных участков этих многообразий.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Прокофьев, ДАН, **140**, № 5, 1033 (1961). [2] В. А. Прокофьев, ДАН, **194**, № 6, 1290 (1970). [3] В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, М., 1967. [4] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М., 1954. [5] С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, М.– Л., 1949; Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959. [6] П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др., Интегральные уравнения, М., 1968. [7] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М.– Л., 1951. [8] С. К. Годунов, Уравнения математической физики, М., 1971. [9] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, Основные дифференциальные уравнения математической физики, М., 1962.