Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 517.91.943

МАТЕМАТИКА

Н. Г. М. ВАЙНБЕРГ, Г. А. КАМЕНСКИЙ, А. Д. МЫШКИС

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА, ОБЛАДАЮЩЕГО ИНТЕГРИРУЮЩИМ МНОЖИТЕЛЕМ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 26 I 1973)

1. В работе приводится ряд качественных утверждений для одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изучается уравнение

$$P(x(t),\ x(t-1))x'(t)+Q(x(t),\ x(t-1))x'(t-1)=0. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ определены на всей плоскости x, y и удовлетворяют в каждой конечной части плоскости условию Липшица. Уравнению (1) сопоставляется уравнение

$$P(x,\ y)\ dx+Q(x,\ y)\ dy=0. \tag{2}$$

Пусть $\mu(x,\ y)$ — интегрирующий множитель уравнения (2), а $F(x,y)=$ $=C$ — соответствующий первый интеграл. После умножения обеих частей уравнения (1) на $\mu(x(t),\ x(t-1))$ получается соотношение $[F(x(t),$ $x(t-1))]'=0$, т. е. конечно-разностное уравнение

$$F(x(t),\ x(t-1))=C. \tag{3}$$

Знание интегральных линий уравнения (2) на плоскости x, y позволяет делать различные выводы о поведении решений уравнения (1).

Идея изучения дифференциального уравнения нейтрального типа путем преобразования его к виду полного дифференциала и последующего интегрирования была высказана и применена к некоторым уравнениям отличной от (1) структуры в работах [1, 2].

Под решением уравнения (1) понимается непрерывно дифференцируемая функция, определенная на некотором интервале $-\infty\leqslant\alpha<t<\beta\leqslant\infty$, $\beta>\alpha+1$, и при $\alpha+1<t<\beta$ удовлетворяющая уравнению (1). В качестве дополнительного условия решение должно быть задано на некотором отрезке длины 1; вследствие инвариантности уравнения (1) по отношению к сдвигу по времени, можно считать, что этим отрезком служит $0\leqslant t\leqslant 1$. Таким образом, предполагается, что заданы значения

$$x(t)=\varphi(t), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{4}$$

причем $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая при $0\leqslant t\leqslant 1$ функция, удовлетворяющая условию согласования

$$P(\varphi(1),\ \varphi(0))\varphi'(1)+Q(\varphi(1),\ \varphi(0))\varphi'(0)=0. \tag{5}$$

Пусть $M_1=(\varphi(1),\ \varphi(0))$, $N_P=\{(x,y)\,|\,P(x,y)=0\}$, $N_Q=\{(x,y)\,|\,Q(x,y)=$ $=0\}$.

2. Теорема 1. *Пусть $M_1\notin N_P\cup N_Q$. Тогда существуют* $\alpha\in[-\infty,\ 0)$ *и* $\beta\in(1,\ \infty]$ *и на интервале* $(\alpha,\ \beta)$ *единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (4), *а также условиям*

$$M_t\overset{\text{def}}{=}(x(t),x(t-1))\notin N_P \quad \forall\, t\in(1,\beta),$$
$$M_t\notin N_Q \quad \forall t\in(\alpha+1,1). \tag{6}$$

При этом множество $\{M_t | 1 \leqslant t < \beta\}$ *(соответственно* $\{M_t | \alpha+1 < t \leqslant 1\}$*) принадлежит интегральной линии L уравнения*

$$dx/dy = -Q(x, y)/P(x, y) \tag{7}$$

(соответственно $dy/dx = -P(x, y)/Q(x, y)$*), проходящей через* M_1.

В дальнейшем предполагается, что $M_1 \notin N_P \cup N_Q$, и для определенности рассматривается только построение решения в сторону $t > 1$ (при таком построении достаточно требовать, чтобы $M_1 \notin N_P$, рассматривая решение на интервале $0 \leqslant t < \beta$); под β понимается наибольшее (конечное или бесконечное) значение, при котором удовлетворяется утверждение теоремы 1. Под L понимается непродолжаемая интегральная линия только уравнения (7), проходящая через M_1, т. е. считается, что L служит графиком непрерывно дифференцируемой функции $x = h(y)$, определенной на некотором открытом (конечном или бесконечном) интервале, и не содержит точек N_P. Легко проверить от противного, что если по крайней мере один из концов интервала, на котором определена функция $h(y)$, конечен, то при приближении y к этому концу либо соответствующая точка линии L уходит в бесконечность, либо расстояние от этой точки до N_P стремится к нулю. Существенно обратить внимание на то, что с ростом t точка M_t движется по линии L, вообще говоря, не монотонно, а может поворачивать вспять.

Если уравнение линии L известно, то построение решения $x(t)$ сводится к последовательному образованию сложной функции. В самом деле, пусть это уравнение имеет вид $x = h(y)$, $p < y < q$ (это обозначение сохраняется и в дальнейшем), причем, как говорилось выше, (p, q) — максимальный интервал, для которого L существует. Тогда

$$\begin{aligned} &x(t) = h(\varphi(t-1)), \quad 1 \leqslant t \leqslant 2,\\ &x(t) = h(x(t-1)), \quad 2 \leqslant t \leqslant 3,\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

причем построение прекращается, лишь если правая часть потеряет смысл, т. е. когда в ней аргумент функции h достигнет одного из значений p, q (что может произойти, только если это значение конечно). Из формулы (8) вытекает, в частности,

Т е о р е м а 2. *Пусть проекция линии L на ось y совпадает со всей этой осью (т. е.* $p = -\infty$, $q = \infty$*). Тогда* $\beta = \infty$.

3. Т е о р е м а 3. *Пусть* $\beta < \infty$. *Тогда при* $t \to \beta - 0$ *траектория* $t \to M_t$ *либо уходит в бесконечность, обладая горизонтальной асимптотой* $y = x(\beta - 1)$, *либо предельным множеством для траектории будет замкнутое связное множество G, расположенное на прямой* $y = x(\beta - 1)$, *причем* $G \subset N_P$.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\beta = \infty$ *и*

$$\underline{x} = \liminf_{t\to\infty} x(t) \qquad \bar{x} = \limsup_{t\to\infty} x(t),$$
$$-\infty \leqslant \underline{x} \leqslant \bar{x} \leqslant \infty.$$

Тогда при $\underline{x} < \bar{x}$ Ω*-предельное множество* M_Ω *траектории* $t \to M_t$ *представляет собой замыкание некоторой дуги линии L; проекция* M_Ω *на каждую из осей x, y представляет собой замыкание интервала* $(\underline{x}, \bar{x})$.

При $\underline{x} = \bar{x} \in (-\infty, \infty)$ $M_t \xrightarrow[t\to\infty]{} (\bar{x}, \bar{x})$, а при $\underline{x} = \bar{x} = \pm\infty$ обе координаты точки M_t при $t \to \infty$ стремятся к $\pm\infty$.

4. В ряде случаев по асимптотическому поведению решения $x(t)$ можно сделать тот или иной вывод о линии L.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\beta = \infty$, *решение* $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$, $t \geqslant 0$, *и пусть* $x(t)$ *при* $t \to \infty$ *имеет конечный предел* $\bar{x}$. *Тогда*

$$|Q(\bar{x}, \bar{x})| \leqslant |P(\bar{x}, \bar{x})|.$$

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\beta = \infty$ *и решение* $x(t)$ *не ограничено при* $t \to \infty$. *Тогда линия L не может при всех достаточно больших* $|x|$ *целиком принадлежать множеству* $\{(x, y) \mid |x| \leqslant |y|\}$.

Лемма 1. *Пусть $x(t)$ — T-периодическое решение уравнения*

$$x'(t) = -\frac{Q(x(t), x(t-1))}{P(x(t), x(t-1))} x'(t-1) \tag{9}$$

и $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда T — рациональное число.

Теорема 7. *Пусть $x(t)$ — T-периодическое решение уравнения* (9) *(T — наименьший период) и $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Обозначим*

$$\underline{x} = \min_{t\in[0,T]} x(t), \quad \bar{x} = \max_{t\in[0,T]} x(t).$$

Тогда дуга линии L, которую описывает точка M_t, симметрична относительно прямой $y=x$; концами этой дуги служат либо точки $(\bar{x}, \underline{x})$ и $(\underline{x}, \bar{x})$, и в этом случае $T=2/k$, где k — некоторое натуральное число, либо точки $(\underline{x}, \underline{x})$ и $(\bar{x}, \bar{x})$, и в этом случае указанная дуга совпадает с отрезком биссектрисы $y=x$, а $T=1/k$.

Доказательство. По лемме 1 $T=m/n$, где m и n — некоторые натуральные числа. Из формулы (8) имеем $h_m(u) \equiv u$, $\underline{x} \leqslant u \leqslant \bar{x}$, где $h_1(u) \equiv h(u)$, $h_{n+1}(u) \equiv h(h_n(u))$, $n=1, 2, \ldots$; $x=x(t)$.

Из теорем 15.3 и 15.2 из ([3]) вытекает, что либо $h(u) \equiv u$, либо $h(u)$ — убывающая функция, причем $h_2(u) \equiv u$. Для завершения доказательства остается применить формулу (8).

Замечание. Из теорем 4—7 вытекают следствия о несуществовании решений, обладающих теми или иными свойствами. Например, из теорем 4 и 5 следует, что если линия L не пересекает прямую $y=x$, то решение $x(t)$ не может при $t\to\infty$ иметь конечный предел.

5. В некоторых случаях из поведения линии L можно сделать простые выводы о характере решения $x(t)$ уравнения (9), удовлетворяющего начальному условию (4).

Теорема 8. *Пусть дуга $x=h(y)$, $p_1 \leqslant y \leqslant q_1$; $p<p_1<q_1<q$, линии L симметрична относительно прямой $y=x$, а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям*

$$p_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant q_1, \quad \varphi(t) \not\equiv \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда $\beta=\infty$ и $x(t+2) \equiv x(t)$, $0 \leqslant t < \infty$. В частности, если $h(y) \equiv y$, $p_1 \leqslant y \leqslant q_1$, то $x(t+1) \equiv x(t)$, $0 \leqslant t < \infty$.

Теорема 9. *Пусть для некоторого $[p_1, q_1] \subset [p, q]$ выполняются неравенства*

$$p_1 \leqslant h(y) \leqslant q_1 \quad \forall y \in [p_1, q_1], \quad p_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant q_1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Тогда $\beta=\infty$ и $p_1 \leqslant x(t) \leqslant q_1$ $\forall t \in (1, \infty)$.

Доказательство этой теоремы сразу получается из формулы (8).

Следствие. *Пусть $p=-\infty$, $q=\infty$, причем $\limsup\limits_{|y|\to\infty} |h'(y)| < 1$. Тогда решение $x(t)$, $1<t<\infty$, ограничено.*

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда для существования $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ необходимо и достаточно, чтобы отрезок $[\min\limits_{t\in[0,1]} \varphi(t), \max\limits_{t\in[0,1]} \varphi(t)]$ целиком принадлежал множеству притяжения неподвижной точки $\bar{x}$ отображения $[p_1, q_1] \xrightarrow{h} [p_1, q_1]$.*

При доказательстве теоремы 10 используется следующая

Лемма 2. *Пусть дано непрерывное отображение T отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ в себя. Пусть для некоторых $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ и $\bar{x} \in [a, b]$ будет $[\alpha, \beta] \cap T[\alpha, \beta] \neq \Lambda$ и*

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = \bar{x} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \tag{10}$$

Тогда соотношение (10) *равномерно по $x \in [\alpha, \beta]$.*

Теорема 11. *Пусть $p=-\infty$, $q=\infty$, причем $\sup |h'(y)| = k < 1$.*

Тогда решение $x(t)$ имеет при $t\to\infty$ конечный предел, равный абсциссе точки пересечения L с прямой $y=x$.

Замечание. Если в условиях теоремы 11 обозначить $\int\limits_{i}^{i+1}|x'(t)|\,dt=V_i$, $i=0, 1, \ldots$, то из уравнения (9) сразу имеем, что $V_{i+1}\leqslant kV_i$, $i=0, 1, \ldots$, откуда, суммируя по i, получаем оценку

$$|x(t)-\varphi(1)|\leqslant\int\limits_{0}^{\infty}|x'(\tau)|\,d\tau\leqslant\frac{k}{1-k}\int\limits_{0}^{1}|\varphi'(\tau)|\,d\tau,\quad 1\leqslant t<\infty.$$

С помощью аналогичных рассуждений нетрудно проверить, что утверждение о существовании $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\bar{x}$ справедливо и в случае, если неравенство $\sup|h'(y)|=k<1$ выполняется только при

$$|y-\varphi(0)|\leqslant\frac{1}{1-k}\int\limits_{0}^{1}|\varphi'(\tau)|d\tau. \tag{11}$$

При этом $\bar{x}$ удовлетворяет неравенству (11) и $h(\bar{x})=\bar{x}$.

Для дальнейшего заметим, что если $\min\limits_{t\in[0,1]}\varphi(t)\leqslant p$ или $\max\limits_{t\in[0,1]}\varphi(t)\geqslant q$, то $\beta\leqslant 2$.

Теорема 12. *Пусть* $p<\min\limits_{t\in[0,1]}\varphi(t)<\max\limits_{t\in[0,1]}\varphi(t)<q$ *и*

$$h(y)>y,\quad \min_{t\in[0,1]}\varphi(t)\leqslant y<q.$$

Тогда:

а) *для* $\beta<\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$h(y)<q,\quad \min_{t\in[0,1]}\varphi(t)\leqslant y<q;$$

если это условие выполнено, то $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=q$;

б) *для* $x'(t)\geqslant 0$, $0\leqslant t<\beta$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi'(t)\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$, *и* $h'(y)\geqslant 0$, $\varphi(0)\leqslant y<q$; *утверждение остается верным, если все неравенства для функций заменить строгими*;

в) *если* $h(y)$, $\min\limits_{t\in[0,1]}\varphi(t)\leqslant y\leqslant\max\varphi(t)$, *не имеет интервалов постоянства, то для* $x'(t)\geqslant 0$, $1\leqslant t\leqslant 2$, *необходимо, чтобы* $\varphi'(t)\geqslant 0$.

Теорема 13. *Пусть проекция линии L на ось x совпадает со всей этой осью,* $\inf|h'(y)|=k>1$ *и* $\varphi(t)\not\equiv\text{const}$.

Тогда решение $x(t)$, $1\leqslant t<\beta$, *не ограничено. Если при этом* $p>-\infty$, $q<\infty$, *то* $\beta<\infty$.

6. Одно из возможных обобщений понятия решения получается, если от начальной функции $\varphi(t)$ требовать только абсолютную непрерывность (тогда условие согласования (5) отпадает) и соответственно от решения — абсолютную непрерывность на каждом замкнутом интервале изменения t. При этом можно дополнительно потребовать, чтобы на каждом таком интервале $x'(t)$ имело не более конечного множества точек разрыва («кусочная гладкость»).

Для обоих этих обобщений все теоремы 1—12, а также теорема 13 для кусочно-гладких решений остаются в силе, причем доказательства не претерпевают существенных изменений.

Справедливость теоремы 13 для произвольных абсолютно непрерывных решений нам неизвестна.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
24 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Шарковский. Тр. V Межд. конф. по нелинейным колебаниям, 1, Киев, 1970, стр. 598. [2] А. Н. Шарковский, Мат. физика, Респ. межвед. сборн. в. 8, (1970), стр. 167. [3] M. Kucma, Functional Equations in a Single Variable, Warszawa, 1968.