

В. ТУЧКЕ (W. TUTSCHKE)

**НОВОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И. Н. ВЕКУА
К ТЕОРЕМЕ КАРЛЕМАНА ***

(Представлено академиком И. Н. Векуа 25 VI 1973)

1. Для обоснования теории обобщенных аналитических функций (одного комплексного переменного) имеется две возможности: сперва устанавливается изолированность нулей (теорема Карлемана (1)) и потом теорема взаимности $w = \Phi w_0$ (Φ аналогично, $w_0 \neq 0$, см. (2), (3)) или, следуя И. Н. Векуа, можно непосредственно доказать теорему взаимности, следствием которой — изолированность нулей (4, 5).

Предмет этой работы — применение этого метода И. Н. Векуа к нелинейным уравнениям с частными производными для функций многих комплексных переменных.

В случае линейных систем $\partial_j^* w = A_j w + B_j w^*$, $j = 1, \dots, p$, удовлетворяющих некоторым условиям, теорему взаимности доказал А. Коохара (6). При этом $2\partial_j^* = (\partial/\partial x_j) + i(\partial/\partial y_j)$, $x_j + iy_j = z_j$. Для нелинейных уравнений вида $\partial^* w = f(z, w)$, правые части которых удовлетворяют условию Липшица, Х. Меден (7) получил — тоже с помощью метода И. Н. Векуа — теорему взаимности для разности двух решений: $w - \tilde{w} = \Phi w_0$, $w_0 \neq 0$ (из условия Липшица следует, что разность является «аррroxima tely analytic» в смысле Л. Берса (3)). Если система однородна (это значит, что $w = 0$ — решение), тогда теорема взаимности справедлива для самого решения: $w = \Phi w_0$.

2. В области $G = G_1 \times \dots \times G_n$ пространства C^n мы рассматриваем функции $g_{v_1 \dots v_\lambda}$ со следующими свойствами (v_1, \dots, v_λ — различные целые числа между 1 и $p \leq n$):

а) все $g_{v_1 \dots v_\lambda}$ — в каждом $G_{\mu_1} \times \dots \times G_{\mu_x}$ интегрируемые в смысле Лебега (ограниченные) функции ($1 \leq \mu_1, \dots, \mu_x \leq p$);

б) $g_{v_1 \dots v_\lambda} = g_{\sigma_1 \dots \sigma_\lambda}$, если $\sigma_1, \dots, \sigma_\lambda$ — перестановка от v_1, \dots, v_λ ;

в) для $1 \leq \lambda \leq p - 2$ функции $g_{v_1 \dots v_\lambda}$ обладают в z_μ -плоскости почти всюду производными по z_μ^* в смысле Соболева, причем

$$\partial_\mu^* g_{v_1 \dots v_\lambda} = g_{v_1 \dots v_\lambda \mu}$$

для всех $\mu \neq v_1, \dots, v_\lambda$, $1 \leq \mu \leq p$.

$$T_\mu g(z_1, \dots, z_n) = (-1/\pi) \iint_{G_\mu} g(\dots, \xi_\mu, \dots) d\xi_\mu d\eta_\mu / \xi_\mu - z_\mu,$$

$\xi_\mu = \xi_\mu + i\eta_\mu$, Σ^* обозначает суммирование по комбинациям друг от друга различных v_1, \dots, v_λ ; тогда

$$w = \sum_{\lambda=1}^p (-1)^{\lambda-1} \sum^* T_{v_1 \dots v_\lambda} g_{v_1 \dots v_\lambda} \quad (1)$$

есть решение уравнения $\partial_\mu^* w = g_\mu$ почти всюду в z_μ -плоскости (это вытекает из (1), поскольку можно дифференцировать под знаком интеграла; см.

* Работа написана во время пребывания в Математическом институте им. А. М. Размадзе АН ГрузССР, Тбилиси.

(⁸) и в случае производных в смысле Соболева (⁹); при этом надо использовать теорему Фубини).

3. Предположим, что правые части системы

$$\partial_\lambda^* w_\kappa = f_{\kappa\lambda}(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m), \quad (2)$$

$\kappa=1, \dots, m$; $\lambda=1, \dots, p$, обладают (по $\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_p, \operatorname{Re} w_1, \dots, \operatorname{Im} w_m$) непрерывными классическими производными до порядка $p-1$. Далее, для каждого κ функции $f_{\kappa\lambda}$ и их производные до порядка $p-1$ удовлетворяют в \bar{G} следующему равномерному условию типа Липшица: модуль меньше

$$L|w_\kappa|, \text{ если } |w_\kappa| < \varepsilon_0. \quad (3)$$

Из условия (3) следует, в частности, что система (2) однородна.

4. Рассматриваем в G непрерывное решение w_1, \dots, w_m системы (2), обладающее в G непрерывными классическими производными до порядка $p-1$ (см. ниже замечание а)). Множество всех нулей функции w_κ обозначим через M_κ . Пусть $g_{\nu_1 \dots \nu_\lambda}^{(\kappa)}$ равно $\partial_{\nu_\lambda}^* \dots (\partial_{\nu_1}^* w_\kappa / w_\kappa)$ в $G \setminus M_\kappa$ и 0 в M_κ . Тогда функции $g_{\nu_1 \dots \nu_\lambda}^{(\kappa)}$ удовлетворяют всем трем условиям из п. 2: для точек из $G \setminus M_\kappa$, в частности, $g_{\nu_1}^{(\kappa)} = \partial_{\nu_1}^* w_\kappa / w_\kappa = f_{\kappa\nu_1} / w_\kappa$. По индукции следует, что в $G \setminus M_\kappa$ каждая функция $g_{\nu_1 \dots \nu_\lambda}^{(\kappa)}$ равна конечной сумме из произведений $P_1 \dots P_s$, причем или $P_\sigma = a / w_\kappa$, или $P_\sigma = b$, a — производная некоторой функции $f_{\kappa\tau}$ и b — производная некоторой функции w_σ . Ввиду оценки (3) функции $g_{\nu_1 \dots \nu_\lambda}^{(\kappa)}$ в $G \setminus M_\kappa$ ограничены.

Далее, $M_\kappa = \bar{M}_\kappa \setminus \partial G$ — измеримое множество. Следовательно, функции $g_{\nu_1 \dots \nu_\lambda}^{(\kappa)}$ удовлетворяют условию а) из п. 2. Так как $w_\kappa(\dots, \zeta_\mu, \dots)$ в G_μ или тождественно равно нулю, или нули в G_μ при фиксированных $z_1^0, \dots, z_{\mu-1}^0, z_{\mu+1}^0, \dots, z_n^0$ изолированы (в (⁷) данное доказательство в случае $m > 1$ тоже справедливо), условие в) из п. 2 выполнено. Это значит, что для

$$\omega_\kappa = \sum_{\lambda=1}^p (-1)^{\lambda-1} \sum T_{\nu_1 \dots \nu_\lambda} T_{\nu_\lambda} g_{\nu_1 \dots \nu_\lambda}^{(\kappa)} \text{ и } \Phi_\kappa = w_\kappa \exp(-\omega_\kappa)$$

получаются (почти всюду) уравнения

$$\partial_{\nu_1}^* \omega_\kappa = g_{\nu_1}^{(\kappa)}, \quad \partial_{\nu_1}^* \Phi_\kappa = 0 \quad (4)$$

(если $w_\kappa = 0$, тогда $f_{\kappa\lambda} = 0$ по (3)). Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. Если w_1, \dots, w_m — решение системы (2), удовлетворяющее условию Липшица (3), тогда существуют функции Φ_1, \dots, Φ_m , голоморфно зависящие от z_1, \dots, z_p , и $w_\kappa = \Phi_\kappa \exp \omega_\kappa$.

5. Пусть w_1, \dots, w_m — решение системы (2) в какой-либо области G пространства \mathbb{C}^n . В силу предположений теоремы 1 решение можно локально представить в виде (4). Пусть окрестности U_i соответствуют функциям $\Phi_\kappa^{(i)}, \omega_\kappa^{(i)}$; тогда

$$\Phi_\kappa^{(i)} / \Phi_\kappa^{(j)} = \exp(\omega_\kappa^{(i)} - \omega_\kappa^{(j)}) \neq 0 \quad (5)$$

в $U_i \cap U_j$. Так как $\omega_\kappa^{(i)}, \omega_\kappa^{(j)}$ ограничены, $\Phi_\kappa^{(i)} / \Phi_\kappa^{(j)}$ тоже ограничено и, следовательно, голоморфно (из (¹⁰) вытекает, что $\Phi_\kappa^{(j)} \equiv 0$ возможно только, если $w_\kappa \equiv 0$ во всей области G). Уравнения (5) — условия согласованности второй проблемы Кузена. Следовательно, получим следующее утверждение (см. (¹¹)).

Теорема 2. Если вторая проблема Кузена разрешима для области G , теорема взаимности глобально справедлива.

В конце концов в случае $p=n$ получается (локально из теоремы 1 и глобально из теоремы 2)

Теорема 3. Множество всех нулей и каждой функции w_j и всех функций w_1, \dots, w_m совместно — аналитическое множество.

б. Окончательные замечания.

а) Если правые части системы (2) голоморфно зависят от w_1, \dots, w_m , достаточно предположить, что w_1, \dots, w_m — непрерывные функции (так как в этом случае выражения для производных функций $g_\lambda^{(k)}$ не содержат производных от функций w_σ).

б) Случай, рассматриваемый в работе (6), не является частным случаем теоремы 1, потому что производные правых частей $f_\kappa = a_\kappa w + b_\kappa w^*$ в общем не удовлетворяют условию (3).

в) Теорема 1 без предположения однородности системы (2) вообще говоря не правильна (например, $w = z + z^*$ — решение уравнения $\partial^* w = 1$).

г) Относительно теорем существования решений см. (8, 12-14).

д) Пусть M — множество следующего вида: если $\Phi = 0$ в точках множества M , тогда $\Phi = 0$ во всей области (причем Φ — произвольная голоморфная функция, см. (15, 16, 10)). При предположении (3) это утверждение для решения системы (2) **правильно**.

е) Если модули правых частей (и их производных до порядка $p-1$) удовлетворяют оценке

$$|f_{\kappa\lambda}| < L \left| \sum_j w_j \right| \quad \text{и т. д.,}$$

то получается представление

$$\sum_x w_x = \Phi \exp \Omega, \quad \Phi \text{ голоморфно.}$$

Это значит: множество всех совместных нулей функции — подмножество аналитического множества $\{z: \Phi(z) = 0\}$.

ж) В случаях, когда систему

$$\sum_{\mu, \nu} (a_{\mu\nu} \partial_\mu w_\nu + b_{\mu\nu} \partial_\mu^* w_\nu) = f_\kappa$$

($2\partial_\mu = (\partial/\partial x_\mu) - i(\partial/\partial y_\mu)$) преобразованием переменных можно привести к виду (2) (см. (8)), получается представление (4) в новых переменных.

з) Основа данного доказательства теоремы 1 — формула (1), позволяющая приводить случай многих комплексных переменных к случаю одного комплексного переменного.

и) Результаты справедливы тоже в случае решений дифференциальных уравнений на голоморфных многообразиях.

к) При голоморфной зависимости правых частей от w из условия Липшица вида

$$|f_\nu(z_1, \dots, z_n, \bar{w}) - f_\nu(z_1, \dots, z_n, w)| < L |\bar{w} - w|, \dots$$

(для $|\bar{w} - w| < \varepsilon$) следует теорема взаимности для разности двух решений системы

$$\partial_\nu^* w = f_\nu(z_1, \dots, z_n, w).$$

тоже в случае неоднородных систем.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. Carleman, C. R., 197, 471 (1933). ² И. Н. Векуа, Матем. сборн., 31 (73), 217 (1952). ³ L. Bers, Theory of Pseudo-analytic Functions, N. Y., 1953. ⁴ И. Н. Векуа, Сообщ. АН ГрузССР, 14, 449 (1953). ⁵ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ⁶ А. Кооhара, J. Math. Soc. Japan, 23, 213 (1971). ⁷ H. Meden, Math. Nachr., in press. ⁸ A. Newlander, L. Nirenberg, Ann. Math., 65, 391 (1957). ⁹ W. Tutschke, Math. Nachr., in press. ¹⁰ H. Meden, Beitr. Anal., in press. ¹¹ W. Tutschke, Sitzungsberichte Sächs. Akad. Wiss., Math.-naturw. Reihe, 108, H. 5 (1969). ¹² Л. Г. Михайлов, Докл. АН ТаджССР, 14, № 5, 3 (1971). ¹³ Л. Г. Михайлов, А. В. Абросимов, Докл. АН ТаджССР, 14, № 6, 9 (1971). ¹⁴ J. Naas, Beiträge zur komplexen Analysis und deren differentialgeometrischen Anwendungen, Berlin, in press. ¹⁵ С. Carathéodory, J. reine u. angew. Math., 165, 180 (1931). ¹⁶ H. Hornich. Monatsh. Math.. 71. 214 (1967).