Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

И. А. ФЕЛЬДМАН

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 25 VI 1973)

В азимутально-однородном случае названное уравнение имеет вид $(I-T-\lambda M)\varphi=0$, где M — оператор умножения на независимую переменную, T — вполне непрерывный самосопряженный интегральный оператор с ядром $k(x,y)$, определяемым вещественной функцией $g(t)$, $-1\leqslant t\leqslant 1$ (индикатрисой рассеяния), по формуле

$$k(x,y)=\int_0^{2\pi} g(xy+(1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}\cos\alpha)\,d\alpha, \qquad -1\leqslant x, \quad y\leqslant 1.$$

Линейный пучок $I-T-\lambda M$ рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(-1,1)$. Будем предполагать, что $0<g_0\leqslant 1$, $|g_j|<g_0$, $j=1,2,\ldots$, где

$$g_j=2\pi\int_{-1}^{1} g(t)P_j(t)\,dt, \qquad j=0,1,\ldots, \tag{1}$$

а $P_j(t)$ — полиномы Лежандра.

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующего предложения.

Теорема 1. *Если $g^{(4)}(t)\in L_1(-1,1)$, то в интервале $(-1,1)$ лежит лишь конечное число точек спектра пучка $I-T-\lambda M$.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Обозначим через V интегральный оператор с ядром $v(x,y)$, удовлетворяющим условиям

$$v(x,y)=\overline{v(y,x)}, \quad |v(x_1,y)-v(x_2,y)|\leqslant c|x_1-x_2|^\alpha, \quad -1\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 1; \quad \alpha>{}^1/_2. \tag{2}$$

Лемма 1. *Вне промежутка $[-1,1]$ лежит лишь конечное число точек спектра оператора $M+V$.*

Доказательство. В случае, когда $v(x,y)$ удовлетворяет условиям (2) и

$$v(x,-1)=v(x,1)=0, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{3}$$

лемма следует из результатов Л. Д. Фаддеева [1].

Если выполнены только условия (2), то рассмотрим самосопряженный интегральный оператор V_1 с ядром

$$\begin{aligned}v_1(x,y)=v(x,y)-{}^1/_2[(1+x)v(1,y)+(1-x)v(-1,y)+\\+(1+y)v(x,1)+(1-y)v(x,-1)]+\\+{}^1/_4[(1+x)(1+y)v(1,1)+(1+x)(1-y)v(1,-1)+\\+(1-x)(1+y)v(-1,1)+(1-x)(1-y)v(-1,-1)].\end{aligned}$$

Ядро $v_1(x, y)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), и поэтому вне промежутка $[-1, 1]$ лежит конечное число точек спектра оператора $M+V_1$. Так как оператор $V-V_1$ конечномерен и самосопряжен, то для завершения доказательства леммы достаточно установить следующее.

Предложение*. *Пусть интервал (a, b), $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, состоит из регулярных точек самосопряженного оператора A и пусть K — одномерный самосопряженный оператор. Тогда в интервале (a, b) лежит не более одного собственного числа оператора $A+K$.*

В самом деле, пусть λ, $a<\lambda<b$,— собственное число оператора $A+K$ и φ — соответствующий ему собственный вектор. Оператор K можно записать в виде $K\varphi=\pm(\varphi, f)f$, а из равенства $(A-\lambda I)\varphi=\mp(\varphi, f)f$ следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(dE_tf, f)}{t-\lambda}=\mp 1,$$

где E_t — разложение единицы оператора A.

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{a}\frac{(dE_tf, f)}{\lambda-t}=\pm 1+\int\limits_{b}^{\infty}\frac{(dE_tf, f)}{t-\lambda}, \qquad a<\lambda<b, \tag{4}$$

и левая часть равенства (4) является убывающей функцией от λ, а правая часть — возрастающей, причем хотя бы одна из них в строгом смысле, то равенство (4) может выполняться не более чем при одном значении λ.

Лемма 2. *Если $g^{(k)}(t)\in L_1(-1, 1)$, то для чисел g_j, определенных равенством (1), справедливо соотношение $g_j=O(j^{-k-1/2})$.*

В самом деле, с помощью равенств

$$\int\limits_{-1}^{x}P_n(t)\,dt=\frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]=O(n^{-3/2}), \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

(см. ([3]), стр. 454), легко получить, что для функций

$$U_{nr}(x)=\int\limits_{-1}^{x}U_{n(r-1)}(t)\,dt, \qquad r=1, 2, \ldots; \qquad U_{n0}(x)=P_n(x),$$

справедливы равенства $U_{nr}(1)=U_{nr}(-1)=0$, $n\geqslant r$; $U_{nr}(x)=O(n^{-r-1/2})$, $n\to\infty$; $-1\leqslant x\leqslant 1$, из которых непосредственно следует лемма.

Доказательство теоремы 1. Как известно (см., например, ([4])), числа g_j, $j=0, 1, \ldots$, определяемые равенством (1), являются собственными числами оператора T, полиномы $P_j(t)$ — соответствующими собственными функциями, а $\|T\|=g_0$.

Рассмотрим сначала случай $g_0<1$ (неконсервативный). В этом случае оператор $I-T$ является положительно определенным. В силу равенства

$$I-T-\lambda M=-\lambda(I-T)^{1/2}\left[(I-T)^{-1/2}M(I-T)^{-1/2}-\frac{1}{\lambda}I\right](I-T)^{1/2},$$

достаточно убедиться в том, что вне промежутка $[-1, 1]$ лежит конечное число точек спектра оператора $(I-T)^{-1/2}M(I-T)^{-1/2}$.

Легко видеть, что оператор $(I-T)^{-1/2}$ имеет вид $I+T_1$, где T_1 — интегральный оператор с ядром

$$k_1(x, y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2j+1}{2}\,\frac{g_j}{(1-g_j)^{1/2}[1+(1-g_j)^{1/2}]}P_j(x)P_j(y).$$

* Более общее предложение можно получить, например, с помощью результатов статьи ([2]).

Так как $|P_j'(x)|\leqslant cj^2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ (см. ([3])), и в силу леммы 2 $g_j=O(j^{-4,5})$, то функция $k_1(x, y)$ имеет непрерывные первые производные *. Таким образом, оператор $(I-T)^{-1/2}M(I-T)^{-1/2}$ имеет вид $M+V$, где оператор $V=T_1M+MT_1+T_1MT_1$ удовлетворяет условиям леммы 1, и для случая $g_0<1$ теорема доказана.

Рассмотрим теперь консервативный случай ($g_0=1$). Как известно (см. ([4])), множество N точек спектра пучка $I-T-\lambda M$, лежащих в интервале $(-1, 1)$, не более чем счетно, симметрично относительно точки $\lambda=0$ и его предельными точками могут быть лишь точки $\lambda=\pm 1$. Допустим, что множество N бесконечно, и представим пучок $I-T-\lambda M$ в виде

$$I-T-\lambda M=I-T_\varepsilon-\lambda M-\varepsilon(\cdot, P_0)P_0, \tag{5}$$

где $T_\varepsilon=T-\varepsilon(\cdot, P_0)P_0$, а число $\varepsilon>0$ подобрано так, чтобы $|g_j|<1-\varepsilon$, $j=1, 2, \ldots$, и чтобы в интервале $(^1/_2, 1)$ была хотя бы одна точка спектра пучка $I-T_\varepsilon-\lambda M$. Последнее возможно в силу результатов статьи ([5]) (см. также ([6])). Пучок $I-T_\varepsilon-\lambda M$ отвечает индикатрисе $g(t)-\varepsilon$, и в силу доказанной части теоремы в интервале $(-1, 1)$ лежит конечное число точек его спектра. Отметим, что дискретный спектр пучка $I-T-\lambda M$, как и пучка $I-T_\varepsilon-\lambda M$, состоит из собственных значений. Из (5) следует равенство

$$I-T-\lambda M=(I-T_\varepsilon)^{1/2}(I-\lambda B-K)(I-T_\varepsilon)^{1/2},$$

где $B=(I-T_\varepsilon)^{-1/2}M(I-T_\varepsilon)^{-1/2}$, а $K=(\cdot, P_0)P_0$. Пусть $\lambda\in(0, 1)$ — какое-нибудь собственное значение пучка $I-\lambda B-K$ и φ — соответствующая ему собственная функция. Тогда

$$\varphi-\lambda B\varphi=(\varphi, P_0)P_0. \tag{6}$$

Матрица самосопряженного оператора B в базисе из нормированных полиномов Лежандра имеет вид $\|a_{jk}\|_0^\infty$, где элементы $a_{k,k+1}$ и $a_{k+1,k}$, $k=0, 1, \ldots$, отличны от нуля, а все остальные элементы этой матрицы равны нулю. Отсюда легко получить, что из равенств $\psi-\gamma B\psi=0$ (γ — какое-нибудь число) и $(\psi, P_0)=0$ вытекает $\psi=0$. Следовательно, в равенстве (6) $(\varphi, P_0)\neq 0$.

Считая, что $1/\lambda$ не является собственным числом оператора B, из (6) получим $((I-\lambda B)^{-1}P_0, P_0)=1$ или

$$\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(dE_tP_0, P_0)}{\mu-t}=1, \qquad \mu=1/\lambda>1,$$

где E_t — разложение единицы оператора B.

Сделанное ранее допущение о бесконечности множества N приводит к утверждению, что уравнение

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{(dE_tP_0, P_0)}{\mu-t}=\frac{1}{\mu}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\mu_k-\mu}, \qquad 1<\mu<\min_{1\leqslant k\leqslant m}\mu_k, \tag{7}$$

имеет бесконечное число решений (здесь μ_k, $k=1, 2, \ldots, m$, — все различные собственные числа оператора B, лежащие правее точки $\lambda=1$, а α_k — неотрицательные числа). Так как $(\psi, P_0)\neq 0$ для любой собственной функции оператора B, где $\alpha_k>0$, $k=1, 2, \ldots, m$. В интервале $(^1/_2, 1)$ есть хотя бы одна точка спектра пучка $I-T_\varepsilon-\lambda M$, и поэтому среди чисел μ_k, $k=1, 2, \ldots, m$, хотя бы одно меньше 2. Пусть, например, $\mu_1<2$.

---

* Отметим, что ядра $k(x, y)$ и $k_1(x, y)$ операторов T и T_1 могут иметь меньшую гладкость, чем $g(x)$. Например, в случае $g(x)=|x|$ функция $k(x, y)$ не удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha>^1/_2$.

Из того, что уравнение (7) имеет бесконечное число решений, легко получить

$$\lim_{\mu\to 1+0}(-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{1}\frac{(dE_tP_0,P_0)}{(\mu-t)^n}=(-1)^{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{(\mu_k-1)^n},\qquad n=1,2,\ldots$$

Так как $\mu_1-1<1$, то это приводит к противоречию.

Теорема доказана.

Отметим, что для случая аналитической индикатрисы рассеяния теорема 1 была установлена в ([7]).

Я благодарен М. В. Масленникову, обратившему мое внимание на рассмотренную в статье задачу.

Примечание при корректуре. После того как статья была сдана в печать, автор показал, что в теореме 1 условие $g^{(4)}(t)\in L_1(-1,1)$ можно заменить условием $g''(t)\in L_1(-1,1)$, но нельзя заменить условием $g'(t)\ln^{-2}(1-t)\in L_1(-1,1)$.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
18 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Фаддеев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 73, 292 (1964). [2] М. Г. Крейн, Матем. сборн., 20, № 3, 431 (1947). [3] Г. Сеге, Ортогональные многочлены, М., 1962. [4] М. В. Масленников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 97 (1968). [5] В. М. Ени, ДАН, 173, № 6, 1251 (1967). [6] И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал, Матем. сборн., 84, № 4, 607 (1971). [7] D. H. Sattinger, J. Math. and Phys., 45, № 2, 188 (1966).