

В. Р. КАЙГОРODOV

О КРИВИЗНЕ s -РЕКУРРЕНТНЫХ И КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 5 II 1973)

1°. Решая задачу Адамара ⁽¹⁾ о существовании элементарных решений обобщенного уравнения Лапласа $g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi = 0$ для $n=4$, Рюз ⁽²⁾ пришел к рассмотрению четырехмерных римановых пространств рекуррентной кривизны ($\nabla_m R_{ijkl} = k_m R_{ijkl}$, $k_m \neq 0$). Лихнерович ⁽³⁾ доказал, что каждое компактное с положительно определенной метрикой и отличной от нуля скалярной кривизной 2-рекуррентное пространство необходимо является симметрическим или рекуррентным. Позднее Ротер ⁽⁴⁾, не требуя выполнения условий компактности, показал справедливость утверждения Лихнеровича для всех 2-рекуррентных пространств с положительно определенной метрикой вне зависимости от того, обращается скалярная кривизна в нуль или нет. В работе автора ⁽⁵⁾, где исследовались 2-симметрические ($\nabla_m \nabla_n R_{ijkl} = 0$) и 2-рекуррентные пространства — времена общей теории относительности, доказано, что высказанная выше теорема уже не имеет места для пространств с неопределенной метрикой и существуют классы 2-симметрических и 2-рекуррентных пространств, отличные от симметрических и рекуррентных.

2°. В данной заметке рассматриваются n -мерные римановы многообразия произвольной сигнатуры с условиями рекуррентности произвольного порядка, устанавливается вид структуры кривизны таких многообразий.

Определение 1. Пространство V_n назовем s -рекуррентным и обозначим символом $\mathcal{K}_n^s$, если для тензора кривизны выполнено

$$\nabla_{m_1} \nabla_{m_2} \dots \nabla_{m_s} R_{ijkl} = \Omega_{m_1 m_2 \dots m_s} R_{ijkl}, \quad \Omega_{m_1 \dots m_s} \neq 0. \quad (1)$$

С использованием тождеств Бьянки легко показать, что для всякого пространства $\mathcal{K}_n^s$ имеют место соотношения

$$t_{[m} R_{kl]ij} = 0, \quad (2)$$

где $t_{(a)}^b$, $a=1, 2, \dots, N=n^{s-1}$, — совокупность векторов, построенных из тензора $\Omega_{m_1 \dots m_s}$. Линейная оболочка $\mathcal{L}_q$, натянутая на эти векторы, есть подпространство касательного пространства $\mathcal{T}_n$, в каждой точке многообразия.

Определение 2. Пространство V_n назовем квазисимметрическим s -го порядка, если выполняется (2) и следующее условие s -симметричности:

$$\nabla_{m_1} \nabla_{m_2} \dots \nabla_{m_s} R_{ijkl} = 0. \quad (3)$$

Через $\mathcal{K}_n^s$ обозначим пространства V_n , которые являются либо $\mathcal{K}_n^s$ -пространствами, либо в них удовлетворяется (3) с условиями (2). Как следствие (2) и тождеств Риччи получаем, что имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Тензор рекуррентности $\Omega_{m_1 m_2 \dots m_s}$ симметричен по первой паре индексов; для рекуррентных пространств ($s=1$) вектор рекуррентности градиент.

Теорема 2. В пространстве $\mathcal{K}_n^s$ выполняются соотношения:

$$t_m R_{ijk}^m = 2 t_{[j} R_{k]i}, \quad t_m R_j^m = 1/2 R t; \quad (4)$$

$$R_{ijk} R^{ijkl} - 4 R_{ij} R^{ij} + R^2 = 0, \quad (5)$$

$$(R_{i[k} R_{l]j} - 1/4 R_{ijkl}) R^{ijkl} = 0, \quad (6)$$

где R_{ik} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна, $t^k \in \mathcal{L}_q$.

Теорема 3. Максимальное число линейно независимых векторов среди множеств $\{t^k\}$ не в плоском $\mathcal{K}_n^s$ -пространстве равно двум.

3°. В соответствии с последним утверждением все $\mathcal{K}_n^s$ -пространства разбиваются на 2 типа. К первому типу, обозначаемому символом $\mathcal{K}_n^s(A)$, относим классы пространств, для которых присоединенная линейная оболочка $\mathcal{L}_q$ имеет максимальную размерность $q=2$. Остальные классы $\mathcal{K}_n^s$ -пространств с оболочкой $\mathcal{L}_1$ относим ко второму типу и обозначаем символом $\mathcal{K}_n^s(B)$.

На инвариантном пути пространства $\mathcal{K}_n^s(A)$ подразделяются на 3 не пересекающихся класса (их обозначение $\mathcal{K}_n^s(A_i)$, $i=1, 2, 3$) в зависимости от следующих ситуаций:

1) базис $\mathcal{L}_2$ составляют два неизотропных и ортогональных между собою вектора;

2) векторы базиса ортогональны между собою, один из них необходимо изотропен;

3) оба вектора изотропны и ортогональны между собою.

Алгебраический анализ условий (2) и (4) с использованием канонического репера приводит к следующим результатам.

Теорема 4. Для пространств $\mathcal{K}_n^s(A_1)$ скалярная кривизна отлична от нуля, метрический тензор, тензор кривизны и тензор Риччи имеют следующую структуру:

$$1/2 R_{ijkl} = R e_1 e_2 h_{[i} h_{j]} h_{[k} h_{l]}, \quad R_{ij} = 1/2 R (e_1 h_i h_j + e_2 h_i h_j),$$

$$g_{ij} = \sum_{\sigma=1}^n e_{\sigma} h_i h_j, \quad 1/4 R R_{ijkl} = R_{i[k} R_{l]j}, \quad R_m^j R_k^m = 1/2 R R_k^j, \quad (7)$$

где

$$(hh) = e_{\sigma} \delta_{\sigma\tau}, \quad e_{\sigma} = \pm 1, \quad \sigma, \tau = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 5. В любом $\mathcal{K}_n^s(A_2)$ -пространстве скалярная кривизна равна нулю. Основные тензорные характеристики имеют вид:

$$R_{ijkl} = \varepsilon V_{ij} V_{kl}, \quad R_{ij} = e l_i l_j, \quad g_{ij} = 2 l_{(i} h_{j)} + \sum_{\sigma=3}^n e_{\sigma} h_i h_j, \quad (8)$$

где

$$V_{ik} = 2 l_{[i} h_{k]}, \quad l^2 = h^2 = (lh) = (hh) = 0, \quad (lh) = 1, \quad (hh) = e_{\sigma} \delta_{\sigma\tau}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad e = \pm 1.$$

Теорема 6. Пространства $\mathcal{K}_n^s(A_3)$ необходимо являются пространствами Эйнштейна ($R_{ij}=0$) следующего вида:

$$R_{ijkl} = \varepsilon V_{ij} V_{kl}, \quad g_{ij} = 2 h_{(i} h_{j)} + \sum_{\sigma=5}^n e_{\sigma} h_i h_j, \quad (9)$$

где

$$V_{ik} = 2h_{[i}h_{k]}, \quad h^2 = (hh) = (hh) = (hh) = (hh) = (hh) = (hh) = (hh) = (hh) = 0, \\ (hh) = (hh) = 1, \quad (hh) = e_\sigma \delta_{\sigma\tau}, \quad r=1, \dots, 4; \\ \sigma, \tau = 5, 6, \dots, n; \quad \varepsilon = \pm 1, \quad e_\sigma = \pm 1.$$

4. Пространства $\mathcal{H}_n^*(B)$ распадаются на 2 класса в зависимости от того, является ли базисный вектор оболочки $\mathcal{L}_1$ неизотропным (пространства $\mathcal{H}_n^*(B_1)$) или изотропным (пространства $\mathcal{H}_n^*(B_2)$).

Анализ условий (2), (4), (5) приводит к следующим заключениям.

Теорема 7. Метрический тензор и тензор кривизны $\mathcal{H}_n^*(B_1)$ -пространств имеют строение вида

$$g_{ij} = \sum_{\sigma=1}^n e_\sigma h_i h_j, \quad \frac{1}{4} R_{ijkl} = e_1 h_{[i} R_{j]l} h_{k]}, \quad (10)$$

где

$$(hh) = e_\sigma \delta_{\sigma\tau}, \quad e_\sigma = \pm 1, \quad \sigma, \tau = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 8. Если скалярная кривизна пространства $\mathcal{H}_n^*(B_2)$ отлична от нуля, то метрический тензор, тензор кривизны и тензор Риччи имеют вид

$$g_{ij} = 2t_{(i}h_{j)} + \varepsilon t_i t_j + \sum_{\sigma=3}^n e_\sigma h_i h_j; \quad R_{ij} = R t_{(i}h_{j)}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{4} R R_{ijkl} = R_{i[h} R_{l]j} + \frac{1}{4} R \sum_{\sigma, \tau=3}^n C_{\sigma\tau} V_{ij} V_{kl},$$

где

$$V_{ik} = 2t_{[i}h_{k]}, \quad \sum_{\sigma=3}^n e_\sigma C_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon R, \quad t^2 = (th) = (hh) = 0, \quad (th) = 1, \\ h^2 = -\varepsilon, \quad (hh) = e_\sigma \delta_{\sigma\tau}, \quad \varepsilon = 0, \pm 1, \quad e_\sigma = \pm 1, \quad \sigma, \tau = 3, 4, \dots, n.$$

Теорема 9. Если скалярная кривизна $\mathcal{H}_n^*(B_2)$ -пространства обращается в нуль, то пространство имеет следующую структуру:

$$g_{ij} = 2t_{(i}h_{j)} + \sum_{\sigma=3}^n e_\sigma h_i h_j, \quad R_{ij} = \varepsilon t_i t_j + 2e t_{(i}h_{j)}, \quad (12)$$

$$R_{ijkl} = -\varepsilon V_{ij} V_{kl} + \sum_{\sigma, \tau=3}^n C_{\sigma\tau} V_{ij} V_{kl},$$

где

$$t^2 = h^2 = (th) = (hh) = 0, \quad (th) = 1, \quad (hh) = e_\sigma \delta_{\sigma\tau}, \quad \sum_{\sigma=3}^n e_\sigma C_{\sigma\sigma} = \varepsilon,$$

$$V_{ij} = 2t_{[i}h_{j]}, \quad V_{ij} = 2t_{[i}h_{j]}, \quad \varepsilon = 0, \pm 1, \quad e = 0, 1, \quad e_\sigma = \pm 1, \quad \tau, \sigma = 3, \dots, n.$$

5. Часто возникает необходимость рассмотрения конформно-плоских пространств, как обладающих особыми свойствами среди изучаемых пространств.

Известно, что если V_n — конформно-плоское пространство, то

$$-\frac{1}{2}R_{ijk l} = g_{i[lk}H_{l]j} - g_{j[lk}H_{l]i}, \quad H_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij} \right), \quad (13)$$

$$\nabla_k H_{ij} = \nabla_j H_{ik}. \quad (14)$$

Из соотношений (2), (13), (14) с использованием теоремы 1 и условий ε -симметричности следует

Теорема 10. *Конформно-плоских $\mathcal{H}_n^*$ -пространств с положительно определенной метрикой не существует. Скалярная кривизна всякого конформно-плоского $\mathcal{H}_n^*$ -пространства равна нулю. Метрический тензор, тензор Риччи и тензор кривизны имеют следующее строение:*

$$g_{ij} = 2h_{(i}t_{j)} + \sum_{\sigma=3}^n e_{\sigma} h_i h_j, \quad R_{ij} = e t_i t_j, \quad \frac{1}{4} R_{ijk l} = e t_{[j} g_{i][k} t_{l]},$$

где

$$h^2 = t^2 = (th) = 0, \quad (th) = 1, \quad (hh) = e_{\sigma} \delta_{\sigma\tau}, \quad e = \pm 1, \quad e_{\sigma} = \pm 1, \quad \sigma, \tau = 3, \dots, n.$$

6. Пространства — времена общей теории относительности, удовлетворяющие определению $\mathcal{H}_n^*$ -пространств, в силу условий (2) согласно критерию Лихнеровича ⁽⁶⁾ приобретают важную физическую интерпретацию как пространства, определяемые гравитационными волнами. Приведенные выше результаты для $n=4$ и сигнатуры Лоренца полностью позволяют выяснить структуру кривизны, волновой характер и другие характеристики указанных полей тяготения.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
29 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, New Haven, 1923. ² H. S. Ruse, J. Lond. Math. Soc., **21**, № 84 (1946). ³ A. Lichnerowicz, Proc. Int. Congr. Math., **2**, 216 (1952). ⁴ W. Roter, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astr et phys., **12**, № 4 (1964). ⁵ В. Р. Кайгородов, О два-симметрических и 2-рекуррентных полях тяготения. Препринт ИТФ АН УССР, Киев, 1972. ИТФ-72-46Р. ⁶ В. Д. Захаров, Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна, «Наука», 1972.