Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 517.11+681.3+51.01

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЕВИН

О ЕМКОСТИ ПАМЯТИ АЛГОРИТМОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 III 1973)

Во многих работах рассматривались вопросы, связанные со сложностью вычислений функций. Отметим работы ([1], [2]), в которых были доказаны получившие широкую известность теоремы сжимания и ускорения.

В теореме сжимания строится функция, для которой существует оптимальный вычисляющий алгоритм, а в теореме ускорения — вычислимая функция, для которой оптимального алгоритма нет (т. е. всякий алгоритм может быть существенно улучшен). Эти две теоремы кажутся противоположными, однако А. Н. Колмогоров заметил, что они обе являются частными случаями следующего более общего утверждения:

Пусть $s_i(x)$ — вычислимая убывающая последовательность монотонных общерекурсивных функций, вычислимых на машине Тьюринга с использованием объема памяти, равного их значению. Тогда существует общерекурсивная функция $f(x)$, для которой при всяком i существует вычисляющий ее алгоритм, использующий объем памяти, равный $s_i(x)$, и для всякого алгоритма, вычисляющего f, найдется i такое, что объем памяти, используемый этим алгоритмом, по порядку не меньше $s_i(x)$.

Эта идея побудила автора исследовать, какими вообще свойствами должен обладать класс сигнализирующих для вычисления произвольной заданной общерекурсивной функции. В настоящей работе получены довольно законченные результаты на эту тему. Из них, в частности, вытекают теоремы ускорения, сжимания и изложенная выше гипотеза Колмогорова в качестве простых частных случаев.

Мы будем рассматривать машины Тьюринга с различными алфавитами на ленте. Если мощность алфавита на ленте равна k, то натуральные числа рассматриваются в k-ричной записи. **Простой функцией** будем называть частично-рекурсивную функцию $f(x)$, для которой существует алгоритм, вычисляющий ее с использованием не более $f(x)$ клеток ленты. (Этот алгоритм будем называть **простым алгоритмом**.) Будем условно считать, что простая функция вне области своего определения равна ∞.

Пусть дана общерекурсивная функция $f(x)$. Рассмотрим класс M_f функций $s(x)$, которые задают объем ленты, используемый алгоритмами, вычисляющими $f(x)$ в области своего определения. Этот класс мы будем называть **классом емкостных сигнализирующих для f**. Он будет обладать следующими очевидными свойствами:

a) Все функции, принадлежащие M_f, простые.

b) Если $s_1 \in M_f$, s_2 — простая функция и $s_2 \geqslant s_1/2$, то $s_2 \in M_f$.

c) Если $s_1, s_2 \in M_f$, то $\min(s_1, s_2) \in M_f$.

d) Существует общерекурсивная $s_1 \in M_f$.

e) Класс M_f антиперечислим, т. е. порождается некоторым множеством простых алгоритмов, дополнение к которому перечислимо.

Всякий класс функций, обладающих свойствами a) — e), будем называть **каноническим**.

Теорема 1*. *Класс емкостных сигнализирующих любой функции канонический (что почти очевидно) и для любого канонического класса существует общерекурсивная функция, принимающая значения 0 и 1, для которой он будет классом емкостных сигнализирующих.*

Следующая теорема показывает, что канонические классы очень просто устроены.

Теорема 2 (о точной нижней грани.) *Пусть $g(x)$ — любая общерекурсивная функция, а M_g — класс ее емкостных сигнализирующих.*

Тогда существует общерекурсивная функция $f(x)$ такая, что M_g совпадает с классом всех простых функций, по порядку не меньших $f(x)$.

Очевидно, верно и обратное (так как для любой общерекурсивной $f(x)$ класс простых функций, по порядку не меньших $f(x)$, будет каноническим).

Замечание 1. В силу теоремы сжимания Блюма (²) функция f в теореме 2 не всегда может быть выбрана простой, однако, она всегда может быть выбрана полупростой, т. е. такой, что для нее существует алгоритм $A(x, n)$, который по всякому x и $n \geqslant f(x)$ выдает $f(x)$, используя объем памяти, не больший n.

Существуют задачи более общие, чем задача вычисления заданной функции. Рассмотрим одно из таких обобщений. Пусть дано перечислимое множество A пар чисел (x, y). С ним связана задача: по данному x получить какое-нибудь y такое, что $(x, y) \notin A$. Задачу такого вида мы будем называть обобщенной задачей, если она может быть разрешена хоть каким-нибудь общерекурсивным алгоритмом. Аналогично предыдущему, определяется класс емкостных сигнализирующих обобщенной задачи A. Интересно, что эти классы будут такими же, как и для обычных задач вычисления предикатов.

Замечание 2. Класс емкостных сигнализирующих произвольной обобщенной задачи будет каноническим.

Все результаты легко обобщаются на случай частично-рекурсивных функций. Пусть A — перечислимое множество. Изменим пункты d) и b) определения канонического множества следующим образом: b′) Если $s_1 \in M_f$, s_2 — простая функция и $s_2(x) \geqslant s_1(x)/2$ для всех $x \in A$, кроме конечного числа, то $s_2 \in M_f$.

d′) Существует функция s_1 с областью определения A, принадлежащая классу M_f. Такой класс будем называть частично-каноническим с областью определения A.

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 сохраняют силу при замене слов «общерекурсивная функция» на «частично-рекурсивная» и «канонический класс» на «частично-канонический», с той же областью определения.

Из этого замечания, в частности, вытекает решение проблемы Слисенко о том, имеет ли место теорема ускорения для задачи перечисления креативных множеств.

Пусть алгоритм g перечисляет некоторое множество A. Монотонной сигнализирующей перечисления будем называть функцию $s(x)$, которая равна длине ленты, использованной алгоритмом для выдачи всех элементов A, меньших x. (Если A неразрешимо, то $s(x)$ будет больше любой общерекурсивной функции.)

Следствие 1. *Существует креативное множество A, для которого есть оптимальная по порядку монотонная сигнализующая перечисления. Но также для всякой общерекурсивной $g(x)$ существует креативное множество A_g, у которого для всякой монотонной сигнализирующей перечисления $s_1(x)$ найдется другая сигнализирующая $s_2(x)$ такая, что $s_1(x) \geqslant g(s_2(x))$.*

Все результаты, разумеется, имеют место не только для объема памяти машины Тьюринга, но и для любого другого типа сигнализирующих в смысле (²), правда, уже с точностью не до порядка, а до какой-нибудь другой общерекурсивной функции.

В заключение автор хочет выразить свою благодарность акад. А. Н. Колмогорову и В. А. Слисенко, оказавшим влияние на эту работу.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. O. Rabin, Degree of Difficulity of Computing a Function and Partial Ordering of Recursiv Sete. Techn. Rep. April 1960. ² M. Blum, J. Assol. for Computing Machinary, 14, № 2, 322 (1967). Русск. пер.: Сборн. Проблемы матем. логики, М., 1970.